

TD B2 - VECTEURS ALÉATOIRES

1 Vecteurs de taille quelconque

Exercice 1 *

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et soient $X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda_1), \dots, X_n \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda_n)$ mutuellement indépendantes. On pose $Y = \min(X_1, \dots, X_n)$. Déterminer la loi de Y et $E(Y)$.

Exercice 2 ***

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi $\mathcal{U}([0, 1])$.

- Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $Y_n = \min(X_0, \dots, X_n)$.
Montrer que Y_n est une variable à densité et déterminer l'une de ses densités.
- Soit à présent N une variable aléatoire suivant $\mathcal{P}(\lambda)$ et indépendante des (X_n) . On pose $Z = Y_N = \min(X_0, \dots, X_N)$ c'est-à-dire :

$$\forall \omega \in \Omega, Z(\omega) = \min(X_0(\omega), \dots, X_{N(\omega)}(\omega)).$$

- Montrer que Z est une variable aléatoire.
- Montrer que Z admet une densité et déterminer l'une de ses densités.

2 Sommes de variables à densité

Exercice 3 *

Soient X_1, X_2 et $X_3 \hookrightarrow \mathcal{E}(5)$ indépendantes.

- Déterminer la loi de $5(X_1 + X_2 + X_3)$.
- Déterminer une densité de $X_1 + X_2 + X_3$.

Exercice 4 **

Soient X et une Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi $\mathcal{E}(\lambda)$. On pose $Z = X + Y$.

- Déterminer la loi de λX .
- En déduire la loi de λZ puis une densité de Z .

Exercice 5 - Produit d'uniformes **

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi $\mathcal{U}([0, 1])$.

- Déterminer la loi de $Z = -\ln X$.

- Justifier que Z et $T = -\ln Y$ sont indépendantes. Déterminer la loi de $Z + T$ puis la fonction de répartition de XY et enfin une densité de XY .

Exercice 6 - Loi de Pareto ***

Soient Z_1, \dots, Z_n des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi $\mathcal{U}(]0, a])$ avec $a > 0$. On pose $X_i = \frac{1}{Z_i}$.

- Déterminer la loi des X_i et montrer que ce sont des variables à densité, dont on déterminera une densité.
- Soit $X = \min(X_1, \dots, X_n)$. Montrer que X est une variable aléatoire à densité et déterminer l'une de ses densités.
- En déduire $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 7 - Loi du χ^2 ***

Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi normale centrée réduite. On pose $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i^2$.

- Montrer que la fonction de répartition $Y = X_i^2$ est égale à $F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 2\Phi(\sqrt{x}) - 1 & \text{sinon} \end{cases}$.
- En déduire que Y est une variable à densité et en déterminer une densité.
- Déterminer une densité de $\frac{Y}{2}$ et reconnaître sa loi.
- En déduire la loi de $\frac{Y_n}{2}$ puis une densité de Y_n .

Exercice 8 - Loi Γ à 2 paramètres ***

Soient b et ν deux réels strictement positifs. On définit une fonction :

$$f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{t^{\nu-1} e^{-\frac{t}{b}}}{b^\nu \Gamma(\nu)} & \text{si } t > 0 \end{cases}.$$

- Montrer que f est une densité.

Dans la suite, on considère une variable X admettant f pour densité. On écrira $X \hookrightarrow \Gamma(b, \nu)$.

- Quelle est la loi de $\frac{X}{b}$? Quelle est la loi de X si $\nu = 1$?
- Reconnaître la loi $\Gamma(1, \nu)$.
- Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, X admet un moment d'ordre k et le calculer. Vérifier que $E(X) = b\nu$ et $V(X) = b^2\nu$.

- Soient X_1 et X_2 deux variables réelles indépendantes avec $X_1 \hookrightarrow \Gamma(b, \nu_1)$ et $X_2 \hookrightarrow \Gamma(b, \nu_2)$. Montrer que $X_1 + X_2 \hookrightarrow \Gamma(b, \nu_1 + \nu_2)$.
- Plus généralement, si X_1, \dots, X_n sont n variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que $X_i \hookrightarrow \Gamma(b, \nu_i)$, montrer que $X_1 + \dots + X_n \hookrightarrow \Gamma(b, \nu_1 + \dots + \nu_n)$.
- Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires mutuellement indépendantes sur (Ω, \mathcal{A}, P) suivant la même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Déterminer la loi de $X_1 + \dots + X_n$.

Exercice 9 - D'après EDHEC 2010 ★★★

Soit $a > 0$. On considère deux variables aléatoires X et Y , indépendantes et suivant la même loi $\mathcal{U}([0, a])$. On pose alors : $Z = |X - Y|$.

- (a) Déterminer une densité de $-Y$.
- (b) En déduire que la variable $X - Y$ admet pour densité la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{a-|x|}{a^2} & \text{si } x \in [-a, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On note G la fonction de répartition de $X - Y$.

- (a) Exprimer la fonction de répartition H de la variable Z en fonction de G .
- (b) En déduire qu'une densité de Z est la fonction h définie par :

$$h(x) = \begin{cases} \frac{2(a-x)}{a^2} & \text{si } x \in [0, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

3 Exercices de concours

Exercice 10 - Ecricone 2015 ★★

Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\alpha}{1+x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

- Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que f soit une densité de probabilités.

Dans la suite, on considère que α prend cette valeur.

- Soit X une variable aléatoire de densité f . Déterminer la fonction de répartition F_X de X . X admet-elle une espérance ?

Dans la suite, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et X_1, \dots, X_n sont des variables aléatoires indépendantes admettant toutes f pour densité. On pose alors, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $Y_k = \min(X_1, \dots, X_k)$.

- Déterminer la fonction de répartition de Y_2 et en déduire que Y_2 est une variable à densité dont on donnera une densité f_2 .
- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

- En déduire un équivalent de f_2 en $+\infty$.
- Montrer que Y_2 admet une espérance. En déduire que pour tout $k \geq 2$, Y_k admet une espérance.

Exercice 11 - QSP ESCP 2013 ★★★

Soient X et Y deux variables indépendantes sur (Ω, \mathcal{A}, P) telles que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(\nu, \sigma^2)$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur μ et ν pour que $P(X \leq Y) \geq \frac{1}{2}$.

Exercice 12 - QSP ESCP 2014 ★★★

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur (Ω, \mathcal{A}, P) , indépendantes, admettant une espérance $M \neq 0$ et une variance $V \neq 0$.

- Calculer l'espérance et la variance de XY en fonction de M et V .
- Les variables $X + Y$ et XY sont-elles indépendantes ?

Exercice 13 - Oral HEC 2015 ★★★★★

- Soient a, b, α trois réels strictement positifs vérifiant $0 < \alpha < a^2 \leq b^2$.
 - Établir la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^\alpha \left(\frac{a}{\sqrt{t}} - 1 \right) \left(\frac{b}{\sqrt{a-t}} - 1 \right) dt.$$
 Cette intégrale est notée $I_{a,b}(\alpha)$.
 - Calculer $I_{a,b}(\alpha)$ à l'aide du changement de variable $t = \alpha \cos^2 u$.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on place deux points M et N tels que leurs abscisses respectives X_M et X_N suivent la loi uniforme sur $]0, a[$ et leurs ordonnées Y_M et Y_N suivent la loi uniforme sur $]0, b[$.

On suppose que les quatre variables aléatoires X_M, X_N, Y_M et Y_N sont définies sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) et sont indépendantes.

On note D la variable aléatoire égale à la longueur du segment $[M, N]$: $D^2 = (X_M - X_N)^2 + (Y_M - Y_N)^2$.

- (a) Quelle est la loi suivie par $-X_M$?
- (b) On pose : $Z_a = (X_N - X_M)$ et $Z_b = (Y_N - Y_M)$. Déterminer les lois de probabilités de Z_a et Z_b respectivement.
- (c) Montrer qu'une densité $f_{Z_a^2}$ est donnée par

$$f_{Z_a^2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{a^2} \left(\frac{a}{\sqrt{x}} - 1 \right) & \text{si } 0 < x < a^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- Soit $\theta < a$. Calculer $P(D \leq \theta)$.

Exercice 14 - QSP ESCP 2014 ★★★★★

Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi géométrique de paramètre p . Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la variable aléatoire $\frac{1}{S_n}$ admet une espérance, que l'on notera par la suite m_n .
2. Soient $(k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. Exprimer l'espérance de $\frac{S_k}{S_n}$ en fonction de m_n .

Exercice 15 - Oral HEC 2010 ★★★★★

Soit p un réel donné de $]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$. On considère un couple (U, T) de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) dont la loi de probabilité est donnée par, pour tout entier $n \geq 2$, pour tout $t \in \mathbb{Z}$:

$$P([U = n] \cap [T = t]) = \begin{cases} p^2 q^{n-2} & \text{si } |t| \leq n-2 \\ & \text{et si } n \text{ et } |t| \\ & \text{de même parité} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que $\sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{\substack{|t| \leq n-2 \\ n, |t| \text{ de même parité}}} p^2 q^{n-2} = 1$.
2. (a) Déterminer la loi marginale de U .
(b) En distinguant les trois cas $t = 0$, $t > 0$ et $t < 0$, montrer que la loi marginale de T est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{Z}, P(T = t) = \frac{pq^{|t|}}{1+q}.$$

- (c) Calculer $E(T)$.
3. Soit n un entier supérieure ou égal à 2.
 - (a) Déterminer la loi conditionnelle de T sachant $[U = n]$.
 - (b) Calculer l'espérance conditionnelle $E(T|U = n)$.
4. (a) Justifier l'existence de $E(U)$ et de $E(UT)$. Calculer $\text{Cov}(U, T)$.
(b) Les variables U et T sont-elles indépendantes ?

Exercice 16 - Oral ESCP 2014 ★★★★★

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, définies sur un même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) et suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $U_n = \min_{1 \leq k \leq n} X_k$.

1. Soit n un entier naturel non nul.
 - (a) Déterminer la loi de U_n .
 - (b) Donner une densité de S_n . Montrer que pour tout $x > 0$, $P(S_n > x) = e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k x^k}{k!}$.
2. Soit N une variable aléatoire définie sur (Ω, \mathcal{A}, P) , indépendante des (X_i) et qui suit la loi géométrique de paramètre p avec $0 < p < 1$. On définit S et U par, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$S(\omega) = S_{N(\omega)}(\omega) \text{ et } U(\omega) = U_{N(\omega)}(\omega).$$

On admet que S et U sont des variables aléatoires.

- (a) Montrer que U est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de U .
- (b) Déterminer la loi de S .