Chapitre B2 - Vecteurs aléatoires

1 Généralités

Définition : Vecteur aléatoire

Un vecteur aléatoire sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est la donnée d'un n-uplet de variables aléatoires réelles $(X_1, \dots, X_n)$ définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Exemples :

- Lorsqu'on lance deux dés, le couple (X_1, X_2) où X_1 est la valeur du premier dé et X_2 est la valeur du second est un vecteur aléatoire.
- Sur une classe de n élèves, les notes $(X_1, \dots, X_n)$ des élèves à la prochaine interrogation peut être modélisé par un vecteur aléatoire.

Définition : Loi d'un vecteur aléatoire

La loi d'un vecteur aléatoire $(X_1, \dots, X_n)$ défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est donnée par la fonction $F_{(X_1,\dots,X_n)}$ définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$F_{(X_1,\dots,X_n)}(x_1, \dots, x_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n}[X_i \leq x_i]\right).$$

Remarques :

- C'est la généralisation de la fonction de répartition pour une variable aléatoire réelle.
- Dans le cas d'une variable aléatoire réelle, on avait fait la distinction entre la loi et la fonction de répartition. On peut techniquement le faire pour des vecteurs aléatoires mais cela amène des difficultés conceptuelles qui ne sont pas au programme.

  De toute façon connaître l'un permet de connaître l'autre. On peut donc passer outre cette difficulté et identifier les deux : connaître la fonction de répartition c'est connaître la loi du vecteur aléatoire.
- Attention ! On regarde l'intersection des événements $[X_i \leq x_i]$. C'est important pour pouvoir avoir les informations de corrélations.

Exemple : Soit (X_1, X_2) un vecteur aléatoire défini sur un espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On donne la fonction de répartition F de (X_1, X_2) définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$F(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 < 0 \text{ ou } x_2 < 0 \\ x_1 x_2 & \text{si } x_1 \in [0,1] \text{ et } x_2 \in [0,1] \\ x_2 & \text{si } x_1 > 1 \text{ et } x_2 \in [0,1] \\ x_1 & \text{si } x_2 > 1 \text{ et } x_1 \in [0,1] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition

Soient $(X_1, \dots, X_n)$ et $(Y_1, \dots, Y_n)$ deux vecteurs aléatoires de même loi. Soit g une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Alors $g(X_1, \dots, X_n)$ et $g(Y_1, \dots, Y_n)$ sont des variables aléatoires et ont même loi.

2 Indépendance de variables aléatoires

Proposition

Si A et B sont indépendants alors A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Remarque : à savoir démontrer

Définition : Indépendance mutuelle de n variables aléatoires

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On dit que X_1, ..., X_n sont mutuellement indépendantes si :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ P\left(\bigcap_{i=1}^{n}[X_i \leq x_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq x_i).$$

Remarques :

- Cela revient à dire que la fonction de répartition du vecteurs aléatoires est le produit des fonctions de répartition. C'est-à-dire que $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes si et seulement si :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ F_{(X_1,\dots,X_n)}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i).$$

  Dit encore autrement, lorsque les variables sont indépendantes, la connaissance des lois marginales suffit à reconstruire la loi du vecteur.

- Dire que n variables sont mutuellement indépendantes c'est dire que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ les événements $[X_i \leq x_i]$ sont mutuellement indépendants.
- Attention, dire que n variables sont mutuellement indépendantes n'est pas équivalent à dire qu'elles sont deux à deux indépendantes.

Définition : Indépendance d'une suite de variables

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **infinie** de variables aléatoires définies sur un même espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On dit que les variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont indépendantes si pour toute partie finie $I \subset \mathbb{N}$, les variables $(X_i)_{i\in I}$ sont indépendantes.

Proposition

Soient X_1,...,X_n des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Alors X_1,...,X_n sont mutuellement indépendantes si et seulement si pour tous I_1, ..., I_n intervalles de $\mathbb{R}$, on a :

$$P([X_1 \in I_1] \cap \dots \cap [X_n \in I_n]) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in I_i).$$

Remarques :

- On utilisera surtout cette caractérisation dans le sens descendant : on sait que les variables sont indépendantes et donc on peut faire des calculs sur les probabilités.
- En particulier, si on prend $I_3 = \ldots = I_n = \mathbb{R}$, On a $P(X_3 \in I_3) = \ldots = P(X_n \in I_n) = 1$. Donc $P([X_1 \in I_1] \cap [X_2 \in I_2]) = P(X_1 \in I_1)P(X_2 \in I_2)$. C'est-à-dire si X_1, ..., X_n sont indépendantes alors X_1 et X_2 le sont aussi.
  Dit autrement, toute sous-famille d'une famille de variables aléatoires indépendantes est également indépendante.
- **Spéciale parisienne :** c'est l'occasion de faire une piqure de rappel sur le formalisme. On rappelle que $\mathcal{A}$ est un ensemble d'événements ($\Omega \in \mathcal{A}$, stable par complémentaire, par union et intersection dénombrables).
  On définit $\mathcal{A}_X$ la tribu engendrée par X. C'est l'ensemble des événements réciproques des Boréliens par X. Formellement :
  $$\mathcal{A}_X = \{X^{-1}(B),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$
  Comme X est une variable aléatoire réelle, on a $\mathcal{A}_X \subset \mathcal{A}$. On peut vérifier que $\mathcal{A}_X$ est bien une tribu. C'est en fait la tribu des événements que l'on peut définir à partir de X.
  $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes si et seulement si tous n-uplets $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{A}_{X_1} \times \dots \times \mathcal{A}_{X_n}$ est mutuellement indépendant.

3 Espérance et covariance

Remarque : On a défini l'espérance dans deux cas : le cas des variables discrètes et le cas des variables à densité. La notion se généralise en une notion unique applicable à tout type de variable aléatoire mais c'est difficile et technique. On ne la définit donc pas plus précisément que cela. En revanche, on cite les théorèmes que l'on pourra utiliser à ce sujet.

Proposition

Soient X, Y, X_1, ..., X_n des variables aléatoires. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. On suppose que X, X_1,...X_n admettent une espérance. On a :

- $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_n X_n$ admet une espérance et :
  $$E(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_n X_n) = \lambda_1 E(X_1) + \lambda_2 E(X_2) + \dots + \lambda_n E(X_n) \quad \textbf{Linéarité}$$
- Si Y admet une espérance et $Y \leq X$ presque sûrement alors :
  $$E(Y) \leq E(X) \quad \textbf{Croissance}$$
- Si $0 \leq |Y| \leq X$ presque sûrement alors Y admet une espérance et :
  $$|E(Y)| \leq E(X) \quad \textbf{Existence par domination}$$

Proposition

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles admettant toutes deux une variance. Alors XY admet également une espérance et :

$$|E(XY)| \leq \frac{1}{2}(E(X^2) + E(Y^2)).$$

Définition : Covariance

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles admettant toutes deux une variance. Alors $(X - E(X))(Y - E(Y))$ admet une espérance et on note :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))).$$

Proposition : Propriétés de la covariance

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires réelles admettant toutes une variance. Soient a et b deux réels. On a :

- **Symétrie :** $\text{Cov}(X,Y) = \text{Cov}(Y,X)$;
- **Bilinéarité :** $\text{Cov}(aX+bY,Z) = a\text{Cov}(X,Z) + b\text{Cov}(Y,Z)$ et $\text{Cov}(X,aY+bZ) = a\text{Cov}(X,Y) + b\text{Cov}(X,Z)$;
- **Positivité :** $\text{Cov}(X,X) = V(X) \geq 0$.

Remarques :

- Si $\text{Cov}(X,X) = 0$ alors $V(X) = 0$ et X est une variable aléatoire certaine. On a alors $X = 0$ si et seulement si X est centrée.
  Cov est donc un produit scalaire sur l'espace des variables aléatoires réelles **centrées** admettant une variance.
  Sa norme associée est : $\|X\| = \sqrt{\text{Cov}(X,X)} = \sqrt{V(X)} = \sigma(X)$ l'écart-type.
- Soient X et Y deux variables aléatoires réelles centrées admettant toutes deux une variance. On a, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\text{Cov}(X,Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$.

4 Sommes de variables aléatoires indépendantes

4.1 Loi de la somme

Proposition : Somme de variables discrètes indépendantes

Soient X et Y deux v.a.r. discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose X et Y indépendantes. Soit $Z = X + Y$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(Z = n) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k)P(Y = n-k).$$

Définition

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrables, c'est-à-dire telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\text{d}t$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\text{d}t$ convergent absolument.
On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\text{d}t.$$

Lorsque cette fonction existe, on l'appelle le produit de convolution de f et g.

Proposition : Somme de variables à densité indépendantes

Soient X et Y deux v.a.r. à densité de densité f_X et f_Y. On suppose X et Y indépendantes. Soit $Z = X + Y$. Soit h le produit de convolution de f_X et f_Y. Si h est bien définie et continue sauf éventuellement en un nombre fini de points alors c'est une densité de Z.
C'est le cas en particulier si f_X ou f_Y est bornée.

Exemples :

- Loi de probabilité de la somme de deux uniformes sur $[0,1]$
- **Gros exemple :** X_1, ..., X_n indépendantes et suivent toutes la loi uniforme sur $[0,1]$. Calculer $P([X_n \geq X_1] \cap [X_n \geq X_2] \cap \cdots \cap [X \geq X_{n-1}])$.

4.2 Sommes de lois usuelles

Proposition : Stabilité de la loi normale pour la somme

Soient $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ indépendantes.
Alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Proposition : Stabilité de la loi γ pour la somme

Soient $X_1 \hookrightarrow \gamma(\nu_1)$ et $X_2 \hookrightarrow \gamma(\nu_2)$ indépendantes.
Alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \gamma(\nu_1 + \nu_2)$.

Remarque : Tous les cas précédents se généralisent facilement à la somme de n variables.

Proposition : Loi de la somme de loi exponentielle

Soient $X_1, \ldots, X_n \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ indépendantes.
Alors $X_1 + X_2 + \cdots + X_n \hookrightarrow \gamma(n)$.

Remarque : Si on somme n variables de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, il faut se ramener à des variables de loi $\mathcal{E}(1)$.
Exemple : Loi de $X_1 + X_2$ avec $X_1, X_2 \hookrightarrow \mathcal{E}(2)$.