

TP B2 - MÉTHODE D'INVERSION

Dans tout le TP, on importe les modules suivants :

```
1 import numpy as np
import numpy.random as rd
```

Exercice 1 - Loi de Cauchy

La loi de Cauchy est la loi donnée par la densité définie sur $\mathbb{R}$ suivante : $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$.

1. Vérifier que la fonction donnée est bien une densité de probabilité.
2. Calculer la fonction de répartition associée.
3. Montrer alors que si $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$ alors $X = \tan\left[\pi\left(Y - \frac{1}{2}\right)\right]$ suit une loi de Cauchy.
4. Compléter le code Python suivant afin qu'il simule un tirage d'une variable suivant une loi de Cauchy :

```
1 def cauchy():
    y = rd.random()
    x = ...
    return x
```

Exercice 2 - Loi de Poisson

Dans le cas discret, nous n'avons utilisé la méthode d'inversion que pour des lois à univers image fini. On va essayer ici de généraliser la technique à des cas de variable discrète pouvant prendre une infinité de valeur en étudiant le cas de la loi de Poisson.

1. Chercher à placer des points sur le segment $[0, 1]$ de manière analogue au cas fini de l'exercice 4 du TP précédent pour pouvoir simuler une loi de Poisson.
2. On part du code suivant :

```
1 def new_poisson(mu):
    y = rd.random()
    k = 0
    u = np.exp(-mu)
5    s = u
    while s < y:
        k = k+1
        u = u*mu/k
        s = s+u
10    return k
```

- (a) Que représente la variable **y** ?
- (b) Que représente la variable **u** ?
- (c) Que représente la variable **s** ?
- (d) À quoi sert la condition **s < y** dans la boucle ?

Exercice 3 - Loi de Rayleigh

Soit $\sigma > 0$ (comment se prononce cette lettre ?). On pose la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \frac{1}{\sigma^2} x e^{-\frac{x^2}{2\sigma}}$.

1. Montrer que f est une densité.
2. Donner la fonction de répartition F associée.
3. Montrer que F est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $]0, 1[$.
4. En déduire une fonction Python permettant de simuler la loi donnée par f en utilisant la méthode d'inversion.
5. X suit la loi de densité f , quelle est la loi de $Y = X^2$?

Exercice 4 - C'est sans espérance

On a vu dans le cours que la loi de Cauchy n'admet pas d'espérance (seriez-vous capable de le redémontrer ?). On va chercher ici à le visualiser.

On réutilise la fonction **cauchy** définie à l'exercice 1.

1. On part du code suivant :

```
1 def serie_cauchy(n):
    A = np.zeros(n)
    for i in range(n):
        A[i] = cauchy()
5 return A
```

Que fait-il ?

2. On complète le code de la manière suivante :

```
1 def serie_cauchy(n):
    A = np.zeros(n)
    for i in range(n):
        A[i] = cauchy()
5 B = np.cumsum(A) / np.arange(1, n+1)
    return A, B
```

- (a) Rappeler ce que fait l'instruction **np.cumsum**.
 - (b) Que fait l'opération $/$ entre deux tableaux **numpy** ?
 - (c) Que contient donc le tableau **B** à la fin de la fonction ?
3. On utilise la fonction précédente dans le code suivant :

```
1 import matplotlib.pyplot as plt

serie, moyennes = serie_cauchy(10000)
plt.plot(moyennes)
5 plt.show()
```

- (a) Rappeler le rôle de **plt.plot** et **plt.show**.
- (b) Exécuter les instructions Python sur un ordinateur. Qu'observe-t-on ? Comment interpréter cela vis-à-vis de l'espérance de la loi de Cauchy ? Au besoin comparer avec le même graphe pour une loi exponentielle.