# Chapitre 13 - Calcul différentiel d'ordre 2

## 1 Topologie sur $\mathbb{R}^n$ (bord du programme appli)

### 1.1 Disques ouverts, disques fermées

**Définition**

Soit $a \in \mathbb{R}^2$ et soit $r > 0$.
On appelle disque fermé de centre $a$ et de rayon $r$ l'ensemble noté $\overline{B}(a,r)$ défini par :

$$\overline{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,a) \leq r\}.$$

On appelle disque ouvert de centre $a$ et de rayon $r$ l'ensemble noté $\mathring{B}(a,r)$ défini par :

$$\mathring{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,a) < r\}.$$

**Remarques :**

- On a $\mathring{B}(a,r) \subset \overline{B}(a,r)$.
- La soustraction ensembliste (ou le complémentaire puisqu'il y a inclusion) $\overline{B}(a,r) \setminus \mathring{B}(a,r)$ est le bord du disque. C'est l'ensemble :

$$S(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x,a) = r\}$$

appelé cercle de centre $a$ et de rayon $r$.

### 1.2 Ensemble ouvert, ensemble fermé

**Définition : Ouvert de $\mathbb{R}^2$**

Une partie de $A$ de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si :

$$\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ \mathring{B}(x,r) \subset A.$$

**Exemples :**

- Un disque ouvert est ouvert.
- Un disque fermé n'est pas ouvert.
- $\mathbb{R}^\star$ est ouvert.
- $\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}$ est ouvert.
- $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ n'est pas ouvert.

**Proposition**

- $\mathbb{R}^2$ est ouvert dans $\mathbb{R}^2$.
- Une intersection **finie** d'ouverts de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert.
- Une union dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert.

**Définition**

Un ensemble $A \subset \mathbb{R}^2$ est dit fermé si son complémentaire est un ouvert.

**Exemples :**

- Un disque fermé est fermé.
- Un disque ouvert n'est pas fermé.
- $\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}$ n'est pas fermé.
- $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ est fermé.

**Proposition**

- $\mathbb{R}^2$ est fermé dans $\mathbb{R}^2$.
- Une union **finie** de fermés de $\mathbb{R}^2$ est un fermé.
- Une intersection dénombrable de fermés de $\mathbb{R}^2$ est un fermé.

**Exemple :** $\{a\}$ est un fermé : c'est $\overline{B}(a,0)$ mais c'est aussi $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a-1/n; a+1/n]$.
**Remarque : Attention !** Fermé et ouvert ne sont pas contraires l'un de l'autre. On peut être l'un ou l'autre, ou les deux ou ni l'un ni l'autre :

- $\overline{B}(a,r)$ est fermé mais pas ouvert.
- $\mathring{B}(a,r)$ est ouvert mais pas fermé.
- $\mathbb{R}^2$ est à la fois ouvert et fermé.
- $[a,b[$ n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$.

**Proposition**

- Un produit cartésien d'ouverts est ouvert.
- Un produit cartésien de fermés est fermé.

### 1.3 Parties bornées de $\mathbb{R}^2$

**Définition**

Une partie $A \subset \mathbb{R}^2$ est dite bornée s'il existe $M > 0$ tel que :

$$\forall x \in A, \ \|x\| \leq M.$$

Cela est équivalent à dire qu'il existe $M > 0$ tel que $A \subset \overline{B}(0, M)$.

**Exemples :**

- Un segment de $\mathbb{R}$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$.
- Les disques sont bornées.

**Remarque :** La définition coïncide sur $\mathbb{R}$ avec la définition usuelle de parties bornées.

**Proposition**

Une partie $A \subset \mathbb{R}^2$ est bornée si et seulement si il existe $N > 0$ tel que :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in A, \ |x_1| \leq N, \ |x_2| \leq N, \ \ldots, \ |x_n| \leq N.$$

**Exemples :**

- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \ x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1\}$ est borné.
- $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \ xy = 1\}$ n'est pas borné.

## 2 Fonction définies sur une partie de $\mathbb{R}^n$

### 2.1 Définition, continuité

**Définition**

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ une partie quelconque de $\mathbb{R}^2$. On appelle fonction numérique sur $\Omega$ toute fonction de la forme : $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

**Définition : Continuité sur une partie**

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. On dit que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est continue en $x_0 \in \Omega$ si :

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists \eta > 0, \ \forall x \in \Omega, \ d(x, x_0) \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon.$$

On dit que $f$ est continue sur $A \subset \Omega$ si $f$ est continue en tout point $x \in A$.

**Remarques :**

- On peut l'écrire en termes de boules fermée :

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists \eta > 0, f(\overline{B}(x_0, \eta) \cap \Omega) \subset \overline{B}(f(x_0), \epsilon).$$

- Les résultats sur les opérations usuelles se traduisent sans problème et restent valables.
  **Exemple :** $(x, y) \mapsto \ln(x^2 + y)$

### 2.2 Extrema : rappels

**Définition : Extrema globaux**

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$. On dit que $f$ atteint un maximum (resp. minimum) global en $a \in \Omega$ si :

$$\forall x \in \Omega, \ f(x) \leq f(a) \text{ (resp. } \geq)$$

**Définition : Extrema locaux**

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$. On dit que $f$ atteint un maximum (resp. minimum) local en $a \in \Omega$ s'il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall x \in \Omega \cap \mathring{B}(a, r), \ f(x) \leq f(a) \text{ (resp. } \geq)$$

**Proposition**

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$, avec $\Omega$ ouvert et $f$ $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega$. Si $f$ admet un extremum local en $a \in \Omega$ alors $\nabla f(a) = 0$.

### 2.3 Condition suffisante pour l'existence d'extrema locaux

**Proposition : Rappel $n = 1$**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$ sur $I$. Soit $x_0 \in I$ un point critique de $f$ ($f'(x) = 0$).
Alors :

- si $f''(x_0) > 0$, $f$ atteint un minimum local en $x_0$ ;
- si $f''(x_0) < 0$, $f$ atteint un maximum local en $x_0$ ;
- si $f''(x_0) = 0$, on ne peut pas conclure quant à la nature précise du point critique.

**Proposition**

Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\Omega$ et soit $a \in \Omega$. La matrice hessienne est diagonalisable en base orthonormée. En particulier, elle a 2 valeurs propres (comptées avec multiplicité).

**Proposition**

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^2$ sur $\Omega$ ouvert et soit $x_0 \in \Omega$ un point critique de $f$.
Alors :

- si $\mathrm{Sp}(\nabla^2 f(x_0)) \subset \mathbb{R}_+^\star$, $f$ atteint un minimum local en $x_0$ ;
- si $\mathrm{Sp}(\nabla^2 f(x_0)) \subset \mathbb{R}_-^\star$, $f$ atteint un maximum local en $x_0$ ;
- si $\mathrm{Sp}(\nabla^2 f(x_0))$ contient une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative alors $f$ n'atteint pas d'extremum en $x_0$. Dans ce cas, on dit que $x_0$ est un point selle de $f$.

**Remarques :**

- Encore une fois, on ne tire pas d'informations de la valeur 0.
  Si par exemple $\mathrm{Sp}(\nabla^2 f(x_0)) \subset \mathbb{R}_+$, on ne peut pas conclure.
- Les points selles sont une nouveauté lorsque $n > 1$. Il n'y a pas d'équivalents en dimension 1. Dans une direction, il y a un minimum et dans un autre un maximum.

**Méthode :**

Recherche d'extrema

1. On vérifie que $\Omega$ est ouvert.
2. Vérifier que $f$ est $\mathcal{C}^2$ (à bases d'opérations élémentaires - attention à bien détailler les compositions).
3. Calculer le gradient de $f$.
4. Chercher les points critiques.
5. Déterminer les dérivées secondes et ainsi la hessienne en chaque point critique.
6. Déterminer le spectre de la hessienne en chaque point critique et en déduire la nature du point critique lorsque c'est possible.

**Remarque :** La plupart des points semblent raisonnables. Le premier sort un peu du lot. Illustrons son importance dans le cas $n = 1$. Considérons :

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right. .$$

$f$ atteint un minimum en 0. Mais elle atteint aussi son maximum en $-1$ et en 1 au bord de son domaine.
Au bord, l'étude des extrema ne peut plus se limiter au calcul différentiel. Imposer $\Omega$ ouvert, c'est imposer que $\Omega$ n'a pas de bord et donc éviter ce genre de problèmes.
On verra dans la section suivante une condition qui nous permet tout de même de traiter certains cas où $\Omega$ n'est pas ouvert.

**Exemples :**

- $f(x,y) = x(x+1)^2 - y^2$ ;
- $g(x,y) = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$.

### 2.4 Autre condition d'extrema

**Proposition**

Soit $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ avec $A$ fermé borné. Alors $f$ admet un minimum et un maximum global sur $A$.

**Remarques :**

- Cette fois, $A$ n'est pas un ouvert. C'est un théorème qui traite le cas avec bord. En fait, c'est même l'extrême inverse puisque $\Omega$ doit être fermé.
  Sur $\mathbb{R}$, par exemple, $]0,1[$ est ouvert et $[0,1]$ est fermé. Mais on n'a pas de théorème (en tout cas vu dans ces chapitres) qui permette de traiter le cas $[0,1[$ ou $]0,1]$.
- Le cas $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ permet de visualiser ce qu'il se passe.
- Soit $\Omega = \overline{B}(0,1) \subset \mathbb{R}^2$. On pose : $f : \Omega \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \sqrt{1-(x^2+y^2)}$. $f$ admet un maximum (en $(0,0)$) et un minimum (sur le bord).

## 3 Mathématiques approfondies

### 3.1 Topologie

On généralise les définitions en utilisant la distance définie par le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.
On parle alors de boules ouvertes ou fermées.

**Proposition**

Soit $f$ une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors pour tout ouvert $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$, l'image réciproque $f^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
De même, pour tout fermé $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}$, l'image réciproque $f^{-1}(\mathcal{F})$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

**Remarques :**

- C'est en fait la définition utilisée de continuité en topologie lorsqu'on ne dispose pas de notions de distance. C'est très hors-programme.
- Pour nous, ça nous permet surtout d'affirmer qu'un ensemble est ouvert ou fermé facilement.
  **Exemple :** $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+2y+5yz=0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^3$.

## 3.2 Forme quadratique associée à une matrice symétrique

**Définition : Forme quadratique associée à une matrice symétrique**

Soit $A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$. On appelle forme quadratique associée à $A$ l'application :

$$q_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ h & \mapsto & {}^tHAH \end{array} \right.$$

où $H$ désigne la matrice colonne de $h$ dans la base canonique.

**Exemples :** $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

**Remarques :**

- Tous les termes qui apparaissent sont d'ordre 2. Soit ce sont des carrées de coordonnées ($h_1^2$, $h_2^2$, ...) soit ce sont des produits de deux coordonnées distinctes ($h_1h_2$, ...).
  Puisque $A$ est symétrique, il doit y avoir le même coefficient devant $h_1h_2$ et $h_2h_1$.
- Attention, une forme quadratique n'est pas une forme linéaire !

**Proposition**

Soient $A$ une matrice symétrique et $q_A$ la forme quadratique associée. Il existe une base $B=(e_1,\dots,e_n)$ orthonormée telle que :

$$q_A(h) = \sum_{i=1}^n \lambda_i h_i^2$$

où $h = \sum_{i=1}^n h_i e_i$ et les $\lambda_i$ sont les valeurs propres de $A$.

**Corollaire : Signe d'une forme quadratique**

Soit $A$ une matrice symétrique et $q_A$ la forme quadratique associée.

- Si $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$ alors $q_A$ ne prend que des valeurs positives. On dit que $q_1$ est une forme quadratique positive.
- Si $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_-$ alors $q_A$ ne prend que des valeurs négatives. On dit que $q_1$ est une forme quadratique négative.
- Si $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^\star$ alors $q_A$ ne prend que des valeurs positives et ne vaut 0 que pour le vecteur nul. On dit que $q_A$ est une forme quadratique définie positive.
- Si $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_-^\star$ alors $q_A$ ne prend que des valeurs négatives et ne vaut 0 que pour le vecteur nul. On dit que $q_A$ est une forme quadratique définie négative.
- Si le spectre de $A$ contient des valeurs propres négatives et positives, alors $q_A$ prend tous les signes possibles sur $\mathbb{R}^n$.

## 3.3 Formule de Taylor à l'ordre 2

**Définition : Développement limité à l'ordre 2**

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$. On dit que $f$ admet un développement limité à l'ordre 2 en $a \in \Omega$ s'il existe $v \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$, $\epsilon : \mathring{B}(0,\delta) \to \mathbb{R}$ continue en 0 avec $\delta > 0$ et $\mathring{B}(a,\delta) \subset \Omega$ tels que :

$$\forall x \in \Omega,\ f(x) = f(a) + \langle v|x-a\rangle + \frac{1}{2}q_A(x-a) + \|x-a\|^2\epsilon(x-a).$$

On peut encore l'écrire :

$$\forall h \in \mathbb{R}^n,\ a+h \in \Omega \Rightarrow f(a+h) = f(a) + \langle v|h\rangle + \frac{1}{2}q_A(h) + \|h\|^2\epsilon(h).$$

**Proposition : Unicité du développement limité à l'ordre 2**

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ admettant des dérivées d'ordre 2. On suppose que $f$ admet un développement limité à l'ordre 2 en $a \in \Omega$. On le note :

$$\forall x \in \Omega,\ f(x) = f(a) + \langle v|x-a\rangle + \frac{1}{2}q_A(x-a) + \|x-a\|^2\epsilon(x-a).$$

Alors $v = \nabla f(a)$ et $A = \nabla^2 f(a)$.

**Proposition : Formule de Taylor à l'ordre 2**

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$. Alors il existe $\epsilon : \mathring{B}(0,\delta) \to \mathbb{R}$ continue en 0 avec $\delta > 0$ et $\mathring{B}(a,\delta) \subset \Omega$ tel que pour tout $x \in \Omega$, on a :

$$\forall x \in \Omega,\ f(x) = f(a) + \langle \nabla f(a) | x - a \rangle + \frac{1}{2} q_a(x-a) + \|x-a\|^2 \epsilon(x-a)$$

où $q_a$ est la forme quadratique associée à $\nabla^2 f(a)$. On peut aussi l'écrire :

$$\forall h \in \mathbb{R}^n,\ a + h \in \Omega \Rightarrow f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a) | h \rangle + \frac{1}{2} q_a(h) + \|h\|^2 \epsilon(h).$$

**Exemple :** DL à l'ordre 2 en $(1,0,0)$ de $f : (x,y,z) \mapsto x^2 - (y-2)^3 + (z-x)^2 + 2$.
**Remarque :** Si $\mathrm{Sp}(\nabla^2 f(x_0)) \subset \mathbb{R}_+^\star$ alors la forme quadratique associée à $\nabla^2 f(x_0)$ ne prend que des valeurs positifs.
De même, si $\mathrm{Sp}(\nabla^2 f(x_0)) \subset \mathbb{R}_-^\star$, la forme quadratique ne prend que des valeurs négatives.
Au contraire si $\mathrm{Sp}(\nabla^2 f(x_0))$ contient une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative alors on $q_{x_0}$ prend des valeurs négatives ou positives suivant les directions étudiées.

## 3.4 Dérivées secondes de fonctions directionnelles

**Définition : Fonction directionnelle au voisinage d'un point**

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ avec $\Omega$ ouvert. Soit $a \in \Omega$. Il existe $\delta > 0$ tel que $\mathring{B}(a,\delta) \subset \Omega$.
Soit $h \in \mathbb{R}^n$ unitaire. On définit alors :

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} ]-\delta,\delta[ & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(a+th) \end{array} \right. .$$

On dit que $g$ est défini au voisinage de 0.

**Proposition**

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$ avec $\Omega$ ouvert. Soient $a \in \Omega$ et $h \in \mathbb{R}^n$ unitaire. On pose $g(t) = f(a+th)$ qui est défini au voisinage de 0.
Alors $g$ est 2 fois dérivable au voisinage de 0 et $g''(t) = q_{a+th}(h)$. En particulier :

$$g''(0) = q_a(h) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_{i,j}^2 f(a) h_i h_j.$$