

DS4 APPLI - RÉDUCTION, ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Samedi 11/01/2025 - 4h

Calculatrice interdite

1. La notation des copies tiendra compte de la qualité de la rédaction.
2. Si vous repérez ce qui vous pensez être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant vos initiatives.
3. Encadrez ou soulignez vos résultats.
4. **Changez de copie** à chaque nouvel exercice.

Dans tout le sujet, on suppose que les bibliothèques *Python* sont importées comme suit :

```
1 import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt
```

Exercice 1 - EDHEC ECE 2020 (Exercice 1 - adapté)

On note tB la transposée d'une matrice B et on rappelle que la transposition est application linéaire. On dit qu'une matrice M de $M_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique lorsqu'elle vérifie ${}^tM = -M$ et on note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

1. Montrer que $A_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.

On considère une matrice A fixée de $M_n(\mathbb{R})$ et l'application f , qui à toute matrice M de $A_n(\mathbb{R})$ associe :

$$f(M) = ({}^tA)M + MA.$$

2. (a) Soit M une matrice de $A_n(\mathbb{R})$. Établir que $f(M)$ est antisymétrique.
(b) En déduire que f est un endomorphisme de $A_n(\mathbb{R})$.

Dans toute la suite, on étudie la cas $n = 3$ et on choisit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. On considère les trois matrices $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

- (a) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (J, K, L)$ est une famille génératrice de $A_3(\mathbb{R})$.
- (b) Montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre et en déduire la dimension de $A_3(\mathbb{R})$.
4. (a) Calculer $f(J)$, $f(K)$ et $f(L)$, puis les exprimer comme combinaisons linéaires de J et L seulement. Les calculs devront figurer sur la copie.
(b) En déduire une base de $\text{Im}(f)$ ne contenant que des matrices de $\mathcal{B}$.
(c) En déduire la dimension de $\text{Ker}(f)$ puis en donner une base.
5. (a) Écrire la matrice F de f dans la base $\mathcal{B}$. On vérifiera que ses coefficients sont tous dans $\{-1, 0\}$.
(b) En déduire les valeurs propres de F .
(c) Déterminer les sous-espaces propres propres de F , une base de chacun et leurs dimensions.
(d) F est-elle diagonalisable ?

Exercice 2 - Exercice original

Partie I - Une équation différentielle

Le but de cette partie est de résoudre, sur $\mathbb{R}$, l'équation (E) suivante :

$$y'' - 4y' + 4y = t^2 e^{2t}.$$

1. Donner toutes les solutions de l'équation homogène associée.
2. Recherche d'une solution particulière de (E) .

Soit P une fonction polynomiale.

- (a) Justifier que la fonction $Y_0 : t \mapsto P(t)e^{2t}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si on a, pour tout réel $t : P''(t) = t^2$.
- (b) En déduire une solution particulière de (E) .
3. Conclure en donnant l'ensemble des solutions de (E) .

Partie II - Une équation fonctionnelle

L'objectif de cette partie est de déterminer l'ensemble des fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x)f(y). \quad (\star)$$

4. On commence par montrer que si f vérifie la relation $(\star)$ alors soit $f = 0$, soit f est de la forme $f(x) = a^x$ avec $a > 0$. Pour cela, dans toute cette question, on considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $(\star)$.

- (a) Que dire si $f(0) = 0$?

Dans toute la suite, on supposera que f n'est pas la fonction nulle.

- (b) Déterminer $f(0)$.
- (c) Établir :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}^*, \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f(x) \frac{f(h) - f(0)}{h}.$$

- (d) En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que f vérifie :

$$y' = \lambda y.$$

- (e) Résoudre l'équation différentielle précédente.
- (f) Conclure quand à la forme possible des fonctions vérifiant $(\star)$.
5. Soit $a > 0$. La fonction $f : x \mapsto a^x$ vérifie-t-elle $(\star)$?
6. Conclure.

Exercice 3 - ECRICOME ECE 2021 (Exercice 1 - adapté)

Soit $E = M_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices d'ordre 3 à coefficients réels.

On note I_3 la matrice identité de E et 0_3 la matrice nulle de E .

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices M de E vérifiant :

$$M(M + I_3)(M + 2I_3) = 0_3.$$

Partie I - Exemples de matrices appartenant à $\mathcal{A}$.

1. Déterminer l'ensemble des réels α tels que $\alpha I_3 \in \mathcal{A}$.
2. L'ensemble $\mathcal{A}$ est-il un sous-espace vectoriel de E ?

3. On note $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

- (a) On pose $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer BX_1 et BX_2 .
- (b) En déduire deux valeurs propres de B .
Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres associés.
- (c) Démontrer que B est diagonalisable, et expliciter une matrice D diagonale et une matrice P inversible telle que : $B = PDP^{-1}$.
- (d) Démontrer que $D \in \mathcal{A}$, puis que $B \in \mathcal{A}$.
4. Plus généralement, on suppose que M est une matrice de E diagonalisable, telle que le spectre de M soit inclus dans $\{0, -1, -2\}$.
Montrer que $M \in \mathcal{A}$.

Partie II - Diagonalisabilité des matrices de $\mathcal{A}$.

Soit M une matrice appartenant à $\mathcal{A}$. On note $\text{Sp}(M)$ le spectre de M .

5. Déterminer un polynôme annulateur de M , et démontrer que le spectre de M est inclus dans $\{0, -1, -2\}$.
6. On suppose dans cette question que M admet $0, -1$ et -2 comme valeurs propres.
Justifier que M est diagonalisable.
7. (a) On suppose dans cette question que -1 est l'unique valeur propre de M .
Justifier que M et $M + 2I_3$ sont inversibles, puis démontrer que $M = -I_3$.
(b) Que peut-on dire si $\text{Sp}(M) = \{-2\}$? Si $\text{Sp}(M) = \{0\}$?
8. On suppose dans cette question que M n'admet aucune valeur propre. Justifier que les matrices $M, M + I_3$ et $M + 2I_3$ sont inversibles. Aboutir à une contradiction.
9. Dans cette question, on suppose que M admet exactement deux valeurs propres distinctes.
On traite ici le cas où $\text{Sp}(M) = \{-1, -2\}$ (et on admet que dans les autres situations, le résultat serait similaire).
On veut démontrer par l'absurde que la matrice M est diagonalisable, et on suppose donc que M ne l'est pas.
On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est M .
On note enfin Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

(a) Montrer que :

$$(f + \text{Id}) \circ (f + 2\text{Id}) = 0 \quad \text{et} \quad (f + 2\text{Id}) \circ (f + \text{Id}) = 0.$$

- (b) Démontrer que $\dim(\text{Ker}(f + \text{Id})) \geq 1$ et que $\dim(\text{Ker}(f + 2\text{Id})) \geq 1$.
- (c) On souhaite montrer que $\dim(\text{Ker}(f + \text{Id})) = 1$. On le montre dans cette question par l'absurde en supposant que $\dim(\text{Ker}(f + \text{Id})) \geq 2$.
- Soit (u, v) une famille libre de $\text{Ker}(f + \text{Id})$ (c'est possible puisque $\dim(\text{Ker}(f + \text{Id})) \geq 2$). Soit w un vecteur non nul de $\text{Ker}(f + 2\text{Id})$. Montrer que (u, v, w) est libre.
 - En déduire une contradiction en montrant que M est diagonalisable. Conclure quant à la dimension de $\text{Ker}(f + \text{Id})$.

On admet que l'on peut montrer de même que :

$$\dim(\text{Ker}(f + 2\text{Id})) = 1.$$

- (d) Soit $u \neq 0$ tel que $f(u) = -u$. Soit $v \neq 0$ tel que $f(v) = -2v$.
- Montrer que la famille (u, v) est libre.
 - Soit w un vecteur de $\mathbb{R}^3$ n'appartenant pas à $\text{Vect}(u, v)$. Montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
 - En utilisant le fait que $(f + \text{Id}) \circ (f + 2\text{Id})(w) = 0$ et $(f + 2\text{Id}) \circ (f + \text{Id})(w) = 0$, montrer qu'il existe deux réels α et β tels que :

$$f(w) + 2w = \alpha u \quad \text{et} \quad f(w) + w = \beta v.$$

En déduire que w est une combinaison linéaire de u et v , et aboutir à une contradiction.

10. Montrer alors que pour toute matrice M de E :

$$M \in \mathcal{A} \Leftrightarrow M \text{ est diagonalisable et } \text{Sp}(M) \subset \{0, -1, -2\}.$$

Problème 4 - ECRICOME ECE 2020 (Exercice 3)

Soit a un réel strictement positif.

1. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$I_n(a) = \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^n} dt.$$

Montrer que l'intégrale $I_n(a)$ converge et vaut $\frac{1}{(n-1)a^{n-1}}$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \frac{3a^3}{t^4} & \text{si } t \geq a \end{cases}.$$

(a) Démontrer que f est bien une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité.

(b) Donner la fonction de répartition de X .

(c) Démontrer que X admet une espérance et calculer cette espérance.

(d) Démontrer que X admet une variance et que celle-ci vaut $\frac{3a^2}{4}$.

3. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0, 1]$. On pose $Y = \frac{a}{U^{\frac{1}{3}}}$.

(a) Déterminer $Y(\Omega)$.

(b) Déterminer la fonction de répartition de Y et vérifier que Y et X suivent la même loi.

(c) Écrire une fonction **Python** d'en-tête **def simulX(a, n):** prenant en argument un réel a strictement positif et un entier naturel non nul n , qui renvoie un tableau **numpy** de n coefficients, chacun des coefficients étant un réel choisi de façon aléatoire selon la loi de X . Ces réels sont choisis de façon indépendante.

À cet effet, on rappelle que **rd.random(n)** renvoie un tableau **numpy** de n coefficients choisis indépendamment de manière aléatoire et suivant la loi uniforme sur $]0, 1]$.

4. (a) Calculer $P(X > 2a)$.

(b) Calculer $P_{[X > 2a]}(X > 6a)$.

(c) On suppose que la fonction **Python** de la question 3c a été programmée correctement. Compléter le script ci-dessous afin qu'il renvoie une valeur permettant de vérifier le résultat de la question précédente.

```

1  a = 10
   N = 1000000
   s1 = 0
   s2 = 0
5  X = simulX(a, N)
   for k in range(N):
       if ... :
           s1 = s1 + 1
           if X[k] > 6*a:
10              ...
   if s1 > 0:
       print(...)
```

Soit n un entier naturel non nul, et $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la même loi que X .

5. On pose $V_n = \frac{2}{3n} \sum_{k=1}^n X_k$.

(a) Montrer que V_n admet une espérance et qu'elle vaut a .

(b) Calculer la variance de V_n . Vérifier qu'elle vaut $\frac{a^2}{3n}$.

6. On pose $W_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.

(a) Déterminer la fonction de répartition de W_n et vérifier que W_n est bien une variable aléatoire à densité.

(b) Montrer que W_n admet pour densité la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \frac{3na^{3n}}{t^{3n+1}} & \text{si } t \geq a \end{cases}.$$

(c) Démontrer que W_n admet une espérance et calculer cette espérance. Déterminer alors l'unique réel λ_n dépendant de n tel que $E(\lambda_n W_n) = a$.

(d) Calculer alors la variance de $\lambda_n W_n$ et vérifier qu'elle vaut $\frac{a^2}{3n(3n-2)}$.

7. On rappelle que :

- Si **A** est un tableau **numpy** alors l'instruction **np.sum(A)** renvoie la somme des coefficients de **A**.
- Si **X** est un tableau **numpy**, l'instruction **plt.plot(X, '+')** représente graphiquement les coefficients de **X** à l'aide de croix droites.
- Si **X** est un tableau **numpy**, l'instruction **plt.plot(X, 'x')** représente graphiquement les coefficients de **X** à l'aide de croix obliques.

(a) Compléter la fonction ci-dessous afin qu'elle réalise m simulations de la variable aléatoire V_n et renvoie les résultats obtenus sous forme d'un tableau **numpy** à m éléments :

```
1 def simulV(a, m, n):
    V = np.zeros(m)
    for k in ... :
        X = simulX(a, n)
5     V[k] = ...
    return V
```

Pour la suite, on prendra $n = 100$ et on suppose que l'on dispose d'une fonction similaire **simulW** permettant d'obtenir m simulations de la variable $\lambda_n W_n$.

(b) Compléter les lignes ci-dessous pour écrire le script qui a permis d'obtenir le graphe présenté :

```
1 W = simulW(..., ..., ...)
  V = simulV(..., ..., ...)
  plt.plot(..., '+')
  plt.plot(..., 'x')
5  plt.show()
```

On justifiera la réponse pour les deux dernières lignes.

