DS 4 Appro - Réduction, produit scalaire

Samedi 11/01/2025 - 4h

Calculatrice interdite

1. La notation des copies tiendra compte de la qualité de la rédaction.
2. Si vous repérez ce qui vous pensez être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant vos initiatives.
3. Encadrez ou soulignez vos résultats.
4. **Changez de copie** à chaque nouvel exercice.

Dans tout le sujet, on suppose que les bibliothèques `Python` *sont importées comme suit :*

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

Exercice 1 - ECRICOME ECS 2022 (Exercice 2 - adapté)

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.
On dit qu'un endomorphisme h est nilpotent quand il existe un entier naturel p tel que h^p soit l'endomorphisme nul.
L'objectif de ce problème est de montrer que f est la somme de deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ qui commutent, dont l'un est diagonalisable et l'autre est nilpotent.

1. (a) Vérifier que -1 et 2 sont des valeurs propres de f et déterminer les sous-espaces propres associés.
   (b) On suppose que f est diagonalisable.
   En étudiant la trace de A, aboutir à une contradiction.
   Que peut-on en déduire sur f ?
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}((f + \mathrm{Id})^2)$ et que $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \neq \mathrm{Ker}((f + \mathrm{Id})^2)$.
3. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}((f + \mathrm{Id})^2)$.

Pour simplifier les notations, on note doénavant :

$$F = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}) \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Ker}((f + \mathrm{Id})^2).$$

4. Montrer que F et G sont stables par f.
5. On note $P = (x + 1)^2(x - 2)$. Justifier que $P(f)$ est l'endomorphisme nul.

On note dorénavant $\pi_1 = \frac{1}{9}(f + \mathrm{Id})^2$ et $\pi_2 = -\frac{1}{9}(f + 4\mathrm{Id}) \circ (f - 2\mathrm{Id})$.

6. Justifier que les endomorphismes π_1 et π_2 commutent.
7. (a) Que vaut l'endomorphisme $\pi_2 \circ \pi_1$?
   (b) En déduire une inclusion entre $\mathrm{Ker}(\pi_2)$ et $\mathrm{Im}(\pi_1)$.
8. (a) Montrer que $\pi_1 + \pi_2 = \mathrm{Id}$.
   (b) En déduire une inclusion entre $\mathrm{Ker}(\pi_2)$ et $\mathrm{Im}(\pi_1)$.
9. Justifier que $\mathrm{Ker}(\pi_2) = \mathrm{Im}(\pi_1)$ et que $\mathrm{Ker}(\pi_1) = \mathrm{Im}(\pi_2)$.
10. Déduire des questions 7a et 8a que π_1 et π_2 sont des projecteurs.
11. Montrer que π_2 est le projecteur sur G parallèlement à F. Identifier π_1.

On pose maintenant :

$$g = 2\pi_1 - \pi_2 \quad \text{et} \quad h = f - g.$$

12. Justifier que g et h sont des polynômes de l'endomorphisme f.
13. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de g dans cette base soit $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
14. Montrer que $h = (f - 2\mathrm{Id}) \circ \pi_1 + (f + \mathrm{Id}) \circ \pi_2$.
    En déduire que $h^2 = 0$.
15. Conclure.

Exercice 2 - EDHEC ECS 2022 (Exercice 1 - adapté)

On désigne par a un réel et on considère une variable aléatoire X, de densité f strictement positive et continue sur $\mathbb{R}$, dont la fonction de répartition est notée F.
On pose :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{F(a)} & \text{si } x \leqslant a \\ 0 & \text{si } x > a \end{cases}.$$

1. Montrer que g est bien définie et peut être considérée comme densité d'une variable aléatoire Y.
2. On note G la fonction de répartition de Y.
   (a) Exprimer, pour tout réel x, $G(x)$ à l'aide de F.
   (b) Vérifier que l'on a, pour tout réel x :
   $$G(x) = P_{[X \leqslant a]}(X \leqslant x).$$

Dans la suite, on considère une suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ de variables aléatoires, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que Y.

3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $M_n = \max(Y_1, \ldots, Y_n)$ et on admet que M_n est une variable aléatoire à densité dont on note G_n la fonction de répartition.
   (a) Exprimer $G_n(x)$ à l'aide de G, puis à l'aide de F.
   (b) On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 & \text{si } x \geqslant a \end{cases}$
   Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \psi(x)$. De quelle loi ψ est-elle la fonction de répartition ?
4. On pose $Z_n = n(a - M_n)$ et note H_n la fonction de répartition de Z_n.
   (a) Vérifier que l'on a :
   $$H_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left[\frac{F\left(a - \frac{x}{n}\right)}{F(a)}\right]^n & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$
   (b) Montrer que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \ \frac{F\left(a - \frac{x}{n}\right)}{F(a)} = 1 - \frac{f(a)}{F(a)} \times \frac{x}{n} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$
   (c) On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{f(a)}{F(a)} x\right) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$
   Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \eta(x)$. De quelle loi η est-elle la fonction de répartition ?

Exercice 3 - ECRICOME ECS 2015(Exercice 1 - adapté)

Soit n un entier naturel et soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
Pour tout polynôme P de E, on pose : $\varphi(P) = P'' - 2XP'$.

1. (a) Montrer que φ est un endomorphisme de E.
   (b) Déterminer la matrice associée à φ dans la base canonique de E.
   (c) Montrer que φ est diagonalisable et donner ses valeurs propres.
2. Pour tout $(P,Q) \in E^2$, on note :
$$\langle P, Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t.$$
   (a) Montrer que pour tout $(P,Q) \in E^2$, $\langle P, Q\rangle$ est bien défini.
   (b) Montrer que $(P,Q) \mapsto \langle P, Q\rangle$ définit un produit scalaire sur E.
3. Montrer que pour tout $(P,Q) \in E^2$, $\langle \varphi(P), Q\rangle = \langle P, \varphi(Q)\rangle$.
4. On définit une famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ de polynômes de E par :
$$P_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\},\ P_k = X^k - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\langle P_i, X^k\rangle}{\langle P_i, P_i\rangle} P_i.$$
   (a) Montrer que $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Montrer que la base $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est constituée de vecteurs propres de φ.

Problème 4 - EDHEC ECS 2013 (Problème)

On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes et suivant toutes deux la loi de Poisson de paramètre λ où λ désigne un réel strictement positif. On se propose de déterminer un équivalent de la probabilité $P(X = Y)$ lorsque λ est au voisinage de $+\infty$.

Partie I

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \mathrm{d}t$.

1. (a) Calculer u_0 et u_1.
   (b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   (c) Établir que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
2. (a) Montrer, grâce à une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+2)u_{n+2} = (n+1)u_n$.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$.
   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)u_{n+1}u_n = \frac{\pi}{2}$.
   (d) En déduire la valeur de u_{2n+1}.
3. (a) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+2}}{u_n}$.
   (b) En déduire, en utilisant les variations de (u_n) que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.
   (c) Montrer enfin que l'on a : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Partie II

4. Établir, pour tout réel x, la convergence de l'intégrale $I(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$.

Dans la suite de cette partie, x désigne un réel strictement positif.

5. (a) Montrer qu'il existe une constante M telle que : $\forall x > 0,\ 0 \le \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \le M$.
   (b) Montrer que : $\forall u \in \left[0, \frac{1}{2}\right],\ 1 \le \frac{1}{\sqrt{1-u}} \le 1+u$.
6. (a) En se référant à une loi normale, donner les valeurs de $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.
   (b) Utiliser le changement de variable $u = \sqrt{tx}$, montrer que : $\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{x}}$.

(c) Montrer que la même façon que : $\int_0^1 \mathrm{e}^{-tx}\sqrt{t}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2x\sqrt{x}}$.

7. (a) Montrer, grâce au changement de variable $u = 1+t$ que :

$$\int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u\left(1-\frac{u}{2}\right)}}\mathrm{d}u.$$

(b) Utiliser le résultat de la question 5b pour en déduire que : $I(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{2\pi x}}$.

Partie III

8. Exprimer comme somme d'une série la probabilité $P(X = Y)$.

9. (a) On désigne par t un réel de $[-1, 1]$ et par x un réel strictement positif.
Montrer que, pour tout u compris entre 0 et $-tx$, on a : $\mathrm{e}^{u} \leq \mathrm{e}^{x}$.
Écrire ensuite l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $2n$ pour la fonction $u \mapsto \mathrm{e}^{u}$ entre 0 et $-tx$.

(b) Montrer à l'aide du changement de variable $t = \sin u$ que : $\forall k \in \mathbb{N},\ \int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = u_k$.

(c) Déduire des deux questions précédentes que : $\left| I(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}} \right| \leq \frac{2x^{2n+1}\mathrm{e}^{x}}{\pi(2n+1)!} u_{2n+1}$.

(d) Montrer enfin que : $\forall x > 0,\ I(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}}$.

10. Établir que : $P(X = Y) \underset{\lambda\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda}}$.