Correction DS 4 Appro - Réduction, produit scalaire

Exercice 1 - ECRICOME ECS 2022 (Exercice 2 - adapté)

1. (a) Calculons :

$$\begin{aligned}\operatorname{rg}(A-(-1)I_3) &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & 4 & -1\end{pmatrix}\\ &\underset{L_3\leftarrow L_3-L_1-L_2}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\ &= 2.\end{aligned}$$

Comme $\operatorname{rg}(A-(-1)I_3) \neq 3$, on a $-1 \in \operatorname{Sp}(A)$. Et comme A a le même spectre que f, on a $\boxed{-1 \in \operatorname{Sp}(f).}$
De plus $\dim E_{-1}(A) = 3 - \operatorname{rg}(A-(-1)I_3) = 3-2 = 1$.
Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in E_{-1}(f) &\Leftrightarrow f((x,y,z)) = -(x,y,z)\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y-z = -x\\ 2y = -y\\ x+4y-2z = -z\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z = 0\\ 3y = 0\\ x+4y-z = 0\end{cases}\\ &\underset{L_3\leftarrow L_3-L_1-L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y-z = 0\\ 3y = 0\\ x+4y-z = 0\end{cases}\\ &\underset{L_3\leftarrow L_3-L_1-L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y-z = 0\\ 3y = 0\\ 0 = 0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = z\\ y = 0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow (x,y,z) \in \operatorname{Vect}((1,0,1))\end{aligned}$$

Par égalité avec la dimension, $\boxed{((1,0,1)) \text{ est une base de } E_1(f).}$
De même, on a :

$$\operatorname{rg}(A-2I_3) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix}-2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 4 & -4\end{pmatrix} = 2$$

et donc $\boxed{2 \in \operatorname{Sp}(A) = \operatorname{Sp}(f)}$ et $\dim E_2(f) = 3-2 = 1$.

Et pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in E_2(f) \quad & \Leftrightarrow \quad f((x,y,z)) = 2(x,y,z) \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y - z &= 2x \\ 2y &= 2y \\ x + 4y - 2z &= 2z \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2x + y - z &= 0 \\ x + 4y - 4z &= 0 \end{cases} \\
& \underset{L_3 \leftarrow L_1 + 2L_2}{\Leftrightarrow} \quad \begin{cases} 9y - 9z &= 0 \\ x + 4y - 4z &= 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y &= z \\ x &= 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad (x,y,z) \in \mathrm{Vect}((0,1,1))
\end{aligned}$$

Et de même, $\boxed{((0,1,1)) \text{ est une base de } E_2(f)}$ par égalité des dimensions.

(b) Si f est diagonalisable, puisque $\dim E_{-1}(f) + \dim_2(f) = 2 < 3$, il existe nécessairement une troisième valeur propre λ distincte de -1 et 2. De plus, comme $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, f a au plus 3 valeurs propres et il ne peut pas y en avoir d'autre.

Ainsi $\mathrm{Sp}(f) = \{-1, 2, \lambda\}$. Dans une base adaptée, on a :

$$\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

et donc $\boxed{\mathrm{Tr}(\mathrm{Mat}(f)) = -1 + 2 + \lambda = \lambda + 1.}$

Or $\mathrm{Tr}(A) = 0 + 2 - 2 = 0$ et la trace est invariant de similitude. Donc :

$$\boxed{\lambda + 1 = 0}$$

d'où $\lambda = -1$. $\boxed{\text{On a une contradiction puisque } \lambda \neq -1.}$

Donc $\boxed{f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

2. On a toujours $\boxed{\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}((f + \mathrm{Id})^2)}$ puisque si $x \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$ alors :

$$(f + \mathrm{Id})^2(x) = (f + \mathrm{Id})(\underbrace{(f + \mathrm{Id})(x)}_{=0}) = 0.$$

Montrons que l'inclusion n'est pas une égalité. Il nous faut trouver un vecteur qui est $\mathrm{Ker}((f + \mathrm{Id})^2)$ mais pas dans $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$.

Commençons par trouver un vecteur non trivial dans $\mathrm{Ker}((f + \mathrm{Id})^2)$. Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned}
(f + \mathrm{Id})^2(x) = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad (A + I_3)^3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad y = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad (x,y,z) \in \mathrm{Vect}((1,0,0),(0,0,1)).
\end{aligned}$$

Posons $u = (1,0,0)$. D'après ce qui précède, on a $\boxed{u \in \mathrm{Ker}((f + \mathrm{Id})^2).}$ En revanche :

$$(f + \mathrm{Id})(u) = (0,0,1) + (1,0,0) = (1,0,1) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$$

Donc $\boxed{u \notin \mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id}).}$

Et donc $\boxed{\mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id}) \neq \mathrm{Ker}((f+\mathrm{Id})^2).}$

3. On a déjà montré que :
$$\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}((0,1,1))$$
et :
$$\mathrm{Ker}((f+\mathrm{Id})^2) = \mathrm{Vect}((1,0,0),(0,0,1))$$
Comme ces familles sont libres ce sont des bases respectives de $\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}((f+\mathrm{Id})^2)$.
De plus $((1,0,0),(0,1,1),(0,0,1))$ est échelonnée et est donc une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Par considération sur les dimensions, c'est une base.
Ainsi la concaténation d'une base de $\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id})$ et d'une base de $\mathrm{Ker}((f+\mathrm{Id})^2)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. $\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}((f+\mathrm{Id})^2)$ sont donc supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire :
$$\boxed{\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}((f+\mathrm{Id})^2).}$$

4. Soit $x \in F$. Montrons que $f(x) \in F$.
$f-2\mathrm{Id}$ est un polynôme en f. Il commute donc avec f. On a donc :
$$(f-2\mathrm{Id})(f(x)) = f((f-2\mathrm{Id})(x)) = f(0) = 0.$$
On a bien $f(x) \in F$. Et donc $\boxed{f(F) \subset F.}$
De même, soit $x \in G$. Montrons que $f(x) \in G$.
On a pour les mêmes raisons :
$$(f+\mathrm{Id})^2(f(x)) = f((f+\mathrm{Id})^2(x)) = f(0) = 0.$$
On a bien $f(x) \in G$. Et donc $\boxed{f(G) \subset G.}$

5. Soit $x \in \mathbb{R}^3$. Comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, il existe $y \in F$ et $z \in G$ tel que $x = y+z$.
On a :
$$P(f)(x) = P(f)(y) + P(f)(z) = (f+\mathrm{Id})^2(\underbrace{(f-2\mathrm{Id})(y)}_{=0}) + (f-2\mathrm{Id})(\underbrace{(f+\mathrm{Id})^2(z)}_{=0}) = 0.$$
D'où $\boxed{P(f) = 0.}$

6. π_1 et π_2 commutent car $\boxed{\text{ce sont des polynômes en } f.}$

7. (a) On a :
$$\begin{aligned}\pi_2 \circ \pi_1 &= \left(-\frac{1}{9}(f+4\mathrm{Id}) \circ (f-2\mathrm{Id})\right) \circ \left(\frac{1}{9}(f+\mathrm{Id})^2\right)\\ &= -\frac{1}{81}(f+4\mathrm{Id}) \circ \underbrace{P(f)}_{=0}\\ &= \boxed{0.}\end{aligned}$$

(b) Soit $x \in \mathrm{Im}(\pi_1)$. Il existe donc $y \in \mathbb{R}^3$ tel que $\pi_1(y) = x$.
On a :
$$\pi_2(x) = \pi_2(\pi_1(y)) = 0.$$
Donc $x \in \mathrm{Ker}(\pi_2)$.
D'où $\boxed{\mathrm{Im}(\pi_1) \subset \mathrm{Ker}(\pi_2).}$

8. (a) On a :
$$\begin{aligned}\pi_1 + \pi_2 &= \frac{1}{9}(f+\mathrm{Id})^2 - \frac{1}{9}(f+4\mathrm{Id}) \circ (f-2\mathrm{Id})\\ &= \frac{1}{9}(f^2+2f+\mathrm{Id}) - \frac{1}{9}(f^2+4f-2f-8\mathrm{Id})\\ &= \boxed{\mathrm{Id}.}\end{aligned}$$

(b) Soit $x \in \mathrm{Ker}(\pi_2)$. On a :

$$x = (\pi_1 + \pi_2)(x) = \pi_1(x) + \underbrace{\pi_2(x)}_{=0} = \pi_1(x).$$

Donc $x \in \mathrm{Im}(\pi_1)$.

D'où $\boxed{\mathrm{Ker}(\pi_2) \subset \mathrm{Im}(\pi_1).}$

9. Avec les deux inclusions précédentes, on en déduit que $\boxed{\mathrm{Ker}(\pi_2) = \mathrm{Im}(\pi_1).}$
   De plus, comme π_1 et π_2 commutent, on a $\pi_1 \circ \pi_2 = 0$ et donc $\mathrm{Im}(\pi_2) \subset \mathrm{Ker}(\pi_1)$.
   D'après le théorème du rang, on a :

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Im}(\pi_2) &= 3 - \dim \mathrm{Ker}(\pi_2) \\ &= 3 - \dim \mathrm{Im}(\pi_1) \\ &= \dim \mathrm{Ker}(\pi_1). \end{aligned}$$

   Donc par égalité des dimensions, on a $\boxed{\mathrm{Ker}(\pi_1) = \mathrm{Im}(\pi_2).}$
10. On a :

$$\pi_1^2 = \pi_1 \circ (\mathrm{Id} - \pi_2) = \pi_1 - 0 = \pi_1$$

   et donc $\boxed{\pi_1 \text{ est un projecteur.}}$
   On a de même :

$$\pi_2^2 = \pi_2 \circ (\mathrm{Id} - \pi_1) = \pi_2 - 0 = \pi_2$$

   et donc $\boxed{\pi_2 \text{ est un projecteur.}}$
11. π_2 est le projecteur sur $\mathrm{Im}(\pi_2)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(\pi_2)$.
    Or $\mathrm{Im}(\pi_2) = \mathrm{Ker}(\pi_1) = \mathrm{Ker}(\frac{1}{9}(f + \mathrm{Id})^2) = \mathrm{Ker}((f + \mathrm{Id})^2) = G$.
    Et $\mathrm{Ker}(\pi_2) = \mathrm{Ker}(-\frac{1}{9}(f + 4\mathrm{Id}) \circ (f - 2\mathrm{Id}))$. $f + 4\mathrm{Id}$ est inversible puisque $4 \notin \mathrm{Sp}(f)$.
    Donc $x \in \mathrm{Ker}(\pi_2) \Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}) \Leftrightarrow x \in F$.
    D'où $\boxed{\pi_2 \text{ est le projecteur sur } G \text{ parallèlement à } F.}$
    Comme $\mathrm{Ker}(\pi_1) = \mathrm{Im}(\pi_2) = G$ et $\mathrm{Im}(\pi_2) = \mathrm{Ker}(\pi_1) = F$, on en déduit que
    $\boxed{\pi_1 \text{ est le projecteur sur } F \text{ parallèlement à } G.}$
12. π_1 et π_2 sont des polynômes de f. Donc g est un polynôme de f comme combinaison linéaire.
    Et h est à son tour un polynôme en f comme combinaison linéaire.
13. On connaît une base de F : $((0,1,1))$. Et on connaît une base de G : $((1,0,0),(0,0,1))$. Calculons la matrice de G dans la base concaténée : $\mathcal{B} = ((0,1,1),(1,0,0),(0,0,1))$.
    On a :

$$\begin{aligned} \pi_1((0,1,1)) &= (0,1,1) \\ \pi_1((1,0,0)) &= (0,0,0) \\ \pi_1((0,0,1)) &= (0,0,0) \end{aligned}$$

    car π_1 est le projecteur sur F parallèlement à G. Et on a :

$$\begin{aligned} \pi_2((0,1,1)) &= (0,0,0) \\ \pi_2((1,0,0)) &= (1,0,0) \\ \pi_2((0,0,1)) &= (0,0,1) \end{aligned}$$

    car π_2 est le projecteur sur G parallèlement à F.
    Donc :

$$\begin{aligned} g((0,1,1)) &= 2 \times (0,1,1) \\ g((1,0,0)) &= -1 \times (1,0,0) \\ g((0,0,1)) &= -1 \times (0,0,1) \end{aligned}$$

    Et donc :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

14. Calculons :

$$\begin{aligned} h &= f-g \\ &= f-2\pi_1+\pi_2 \\ &= f\circ(\pi_1+\pi_2)-2\pi_1+\pi_2 \\ &= \boxed{(f-2\mathrm{Id})\circ\pi_1+(f+\mathrm{Id})\circ\pi_2.} \end{aligned}$$

Et donc :

$$\begin{aligned} h^2 &= ((f-2\mathrm{Id})\circ\pi_1+(f+\mathrm{Id})\circ\pi_2)^2 \\ &= (f-2\mathrm{Id})^2\circ\underbrace{\pi_1^2}_{=\pi_1}+2(f-2\mathrm{Id})\circ(f+\mathrm{Id})\circ\underbrace{\pi_1\circ\pi_2}_{=0}+(f+\mathrm{Id})^2\circ\underbrace{\pi_2^2}_{=\pi_2} \\ &\quad \text{(tout commute car ce sont des polynômes en } f) \\ &= \frac{1}{9}(f-2\mathrm{Id})^2\circ(f+\mathrm{Id})^2-\frac{1}{9}(f+\mathrm{Id})^2\circ(f+4\mathrm{Id})\circ(f-2\mathrm{Id}) \\ &= \frac{1}{9}(f-2\mathrm{Id})\circ P(f)-\frac{1}{9}(f+4\mathrm{Id})\circ P(f)\boxed{=0.} \end{aligned}$$

15. On a bien $\boxed{f=g+h, \text{ où } g \text{ est diagonalisable et } h \text{ est nilpotent (d'ordre 2).}}$

Exercice 2 - EDHEC ECS 2022 (Exercice 1 - adapté)

1. Commençons par montrer que g est bien définie. Pour cela, nous devons vérifier que $F(a)\neq 0$.
On a :

$$F(a)=\int_{-\infty}^{a}\underbrace{f(t)}_{\geqslant 0}\,\mathrm{d}t.$$

Or f est postive et continue donc l'intégrale s'annule si et seulement si f est identiquement nulle. Or f est strictement positive. Donc $F(a)\neq 0$ (et même $F(a)>0$).
$\boxed{\text{Donc } g \text{ est bien définie.}}$
Vérifions maintenant que g est une densité :
   - Comme f est continue, $\boxed{g \text{ est également continue.}}$
   - D'après ce qui précède, $F(a)>0$ et f est strictement positive. Donc $\boxed{g \text{ est strictement positive.}}$
   - On a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{a}\frac{f(x)}{F(a)}\mathrm{d}x$$

   qui converge bien puisque f est une densité.
   Puis :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x=\frac{F(a)}{F(a)}=1.}$$

Donc $\boxed{g \text{ est une densité.}}$

2. (a) Comme g est une densité, on peut calculer la fonction de répartition associée pour tout $x\in\mathbb{R}$ avec l'intégrale suivante convergente :

$$G(x)=\int_{-\infty}^{x}g(t)\mathrm{d}t.$$

Si $x\leqslant a$ alors :

$$G(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(t)}{F(a)}\mathrm{d}t=\frac{F(x)}{F(a)}.$$

Et si $x>a$ alors :

$$G(x)=\int_{-\infty}^{a}\frac{f(t)}{F(a)}\mathrm{d}t=\frac{F(a)}{F(a)}=1.$$

Donc :

$$\boxed{G(x) = \begin{cases} \frac{F(x)}{F(a)} & \text{si } x \leqslant a \\ 1 & \text{si } x > a \end{cases}.}$$

(b) Puis que $F(a) \neq 0$, $P(X \leqslant a) \neq 0$ et donc $P_{[X\leqslant a]}(X \leqslant x)$ est bien définie. Calculons pour $x \in \mathbb{R}$:

$$P_{[X\leqslant a]}(X \leqslant x) = \frac{P([X \leqslant x] \cap [X \leqslant a])}{P(X \leqslant a)}$$

Si $x \leqslant a$ alors $[X \leqslant x] \subset [X \leqslant a]$ et donc :

$$P_{[X\leqslant a]}(X \leqslant x) = \frac{P(X \leqslant x)}{P(X \leqslant a)} = \frac{F(x)}{F(a)} = G(x).$$

Et si $x > a$ alors $[X \leqslant a] \subset [X \leqslant x]$ et donc :

$$P_{[X\leqslant a]}(X \leqslant x) = \frac{P(X \leqslant a)}{P(X \leqslant a)} = 1 = G(x).$$

Ainsi on a bien pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{G(x) = P_{[X\leqslant a]}(X \leqslant x).}$$

3. (a) M_n étant une variable aléatoire, calculons sa fonction de répartition pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$G_n(x) = P(\max(Y_1, \dots, Y_n) \leqslant x)$$

Or le maximum est inférieur à x si et seulement toutes les variables Y_1, ..., Y_n sont inférieures à x. Donc :

$$\begin{aligned} G_n(x) &= P(\cap_{i=1}^{n}[Y_i \leqslant x]) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \underbrace{P(Y_i \leqslant x)}_{=G(x)} \text{ (indépendance)} \end{aligned}$$

Et donc :

$$\boxed{G_n(x) = G(x)^n = \begin{cases} \frac{F(x)^n}{F(a)^n} & \text{si } x \leqslant a \\ 1 & \text{si } x > a \end{cases}.}$$

(b) Puisque f est strictement positive et continue, pour $x < a$, on a :

$$\int_x^a f(t)\mathrm{d}t > 0$$

et donc $\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t < \int_{-\infty}^{a} f(t)\mathrm{d}t$ c'est-à-dire $F(x) < F(a)$. Comme $0 < F(x)$, on obtient pour $x < a$:

$$\lim_{n\to+\infty} G(x) = \lim_{n\to+\infty} \Bigg(\underbrace{\frac{F(x)}{F(a)}}_{\in]0,1[}\Bigg)^n = 0.$$

Pour $x > a$, on a $G_n(x) = 1 \to 1$. Et pour $x = a$, on a $G_n(x) = G_n(a) = \frac{F(a)^n}{F(a)^n} = 1 \to 1$.

Donc on a bien pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{G_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \psi(x).}$

$\boxed{\psi \text{ est la fonction de répartition de la variable certaine égale à } a.}$

4. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} H_n(x) &= P(Z_n \leqslant x) = P(n(a - M_n) \leqslant x) \\ &= P\left(M_n \geqslant a - \frac{x}{n}\right) = 1 - P\left(M_n < a - \frac{x}{n}\right) \\ &= 1 - P\left(M_n \leqslant a - \frac{x}{n}\right) \text{ (M_n est à densité)} \\ &= \boxed{\begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left[\frac{F\left(a - \frac{x}{n}\right)}{F(a)}\right]^n & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}} \end{aligned}$$

puisque $x < 0 \Leftrightarrow a - \frac{x}{n} > a$.

(b) Comme f est continue, F est une primitive de f. Donc F est $\mathcal{C}^1$ et la formule de Taylor s'applique :

$$F(a+h) = F(a) + h\underbrace{F'(a)}_{=f(a)} + \underset{h\to 0}{o}(h).$$

En particulier pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\frac{F\left(a-\frac{x}{n}\right)}{F(a)} = 1 - \frac{f(a)}{F(a)} \times \frac{x}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right).}$$

(c) Pour $x < 0$, on a $H_n(x) = 0 \to 0$.
Pour $x \geqslant 0$, on a :

$$\begin{aligned}
n\ln\left[\frac{F\left(a-\frac{x}{n}\right)}{F(a)}\right] &= n\ln\left[1 - \frac{f(a)}{F(a)} \times \frac{x}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right] \\
&= n\left[-\frac{f(a)}{F(a)} \times \frac{x}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right] \\
&= -x\frac{f(a)}{F(a)} + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} -x\frac{f(a)}{F(a)}.
\end{aligned}$$

Donc toujours pour $x \geqslant 0$, on a :

$$\begin{aligned}
H_n(x) &= 1 - \left[\frac{F\left(a-\frac{x}{n}\right)}{F(a)}\right]^n \\
&= 1 - \exp\left(\underbrace{n\ln\left[\frac{F\left(a-\frac{x}{n}\right)}{F(a)}\right]}_{\to -x\frac{f(a)}{F(a)}}\right) \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 - \exp\left(-x\frac{f(a)}{F(a)}\right).
\end{aligned}$$

Donc on a bien pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{H_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \eta(x).}$

$\boxed{\eta \text{ est la fonction de répartition de la loi } \mathcal{E}\left(\frac{f(a)}{F(a)}\right).}$

Exercice 3 - ECRICOME ECS 2015 (Exercice 1 - adapté)

1. (a) Vérifions que φ est linéaire.
Soient $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\varphi(P+\lambda Q) &= (P+\lambda Q)'' - 2X(P+\lambda Q)' \\
&= P'' + \lambda Q'' - 2XP' - 2\lambda XQ' \\
&= (P'' - 2XP') + \lambda(Q'' - 2XQ')\boxed{= \varphi(P) + \lambda\varphi(Q).}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\varphi \text{ est bien une application linéaire}}$ *a priori* de E dans $\mathbb{R}[X]$.
De plus pour $P \in E$, on a $\deg P \leqslant n$. Donc $\deg P' \leqslant n-1$ et $\deg P'' \leqslant n-2$. Puis $\deg 2XP' \leqslant n$.
D'où :

$$\deg \varphi(P) \leqslant \max(\deg P'', \deg 2XP') \leqslant n.$$

Donc $\varphi(P) \in E$ et donc $\boxed{\varphi \text{ est bien un endomorphisme de } E.}$

(b) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On a :

$$\varphi(X^k) = k(k-1)X^{k-2} - 2X \times kX^{k-1}$$

la formule étant valable même pour $k \leqslant 2$ puisque les coefficients s'annulent en cas d'indéterminée au dénominateur.

Donc :

$$\boxed{\varphi(X^k) = -2kX^k + k(k-1)X^{k-2}.}$$

On en déduit, en notant $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$ la base canonique de E :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -4 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & n(n-1) \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -2n \end{pmatrix}}.$$

(c) La matrice de φ dans $\mathcal{B}$ est triangulaire. Son spectre est donc donnée par les valeurs sur la diagonale. On a donc :

$$\mathrm{Sp}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)) = \{0, -2, -4, \ldots, -2n\}$$

puis $\boxed{\mathrm{Sp}(\varphi) = \{0, -2, -4, \ldots, -2n\}.}$

Donc φ admet $n+1$ valeurs propres distinctes. Comme $\dim E = n+1$, $\boxed{\varphi \text{ est diagonalisable.}}$

2. (a) Si $P = 0$ ou $Q = 0$, l'intégrale est évidemment bien définie. On suppose donc $P \neq 0$ et $Q \neq 0$.

Notons $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$ avec $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$. On a :

$$P(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} a_p t^p \quad \text{et} \quad Q(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} b_q t^q.$$

On a donc $P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} a_p b_q t^{p+q} \mathrm{e}^{-t^2}$.

On a alors :

$$t^2 P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} a_p b_q t^{p+q+2} \mathrm{e}^{-t^2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

par croissance comparée et donc $P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge, par domination, $\int_1^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge (et même absolument).

De même $\int_{-\infty}^{-1} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge.

Et donc $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ est bien défini.

(b) • **Linéarité à gauche :** Soient $P, \tilde{P}, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \langle P + \lambda\tilde{P}, Q\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} (P + \lambda\tilde{P}(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[P(t) + \lambda\tilde{P}(t)\right] Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{P}(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \\ &= \langle P, Q\rangle + \lambda\langle\tilde{P}, Q\rangle. \end{aligned}$$

• **Symétrie :** Soient $P, Q \in E$. On a :

$$\begin{aligned} \langle P, Q\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t)P(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \\ &= \langle Q, P\rangle. \end{aligned}$$

- **Positivité :** Soit $P \in E$. On a :
$$\langle P, P\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)P(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{(P(t))^2\mathrm{e}^{-t^2}}_{\geqslant 0}\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$
- **Caractère défini :** Soit $P \in E$. On suppose $\langle P, P\rangle = 0$. Montrons que $P = 0_E$.
On a :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{(P(t))^2\mathrm{e}^{-t^2}}_{\geqslant 0}\,\mathrm{d}t = 0$$
Comme $t \mapsto (P(t))^2\mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(P(t))^2\mathrm{e}^{-t^2} = 0$ et donc $P(t) = 0$.
P a donc une infinité de racines et donc P est le polynôme nul.

Donc $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est bien un produit scalaire sur E.

3. Soient $P, Q \in E$. On a :
$$\langle \varphi(P), Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(P)(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} (P''(t) - 2tP'(t))Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t.$$
et :
$$\langle P, \varphi(Q)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\varphi(Q)(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)(Q''(t) - 2tQ'(t))\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t.$$
Soient $A, B \in \mathbb{R}$. On a par intégration par parties :
$$\begin{aligned}\int_A^B (P''(t) - 2tP'(t))Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t &= \int_A^B \underbrace{(P''(t) - 2tP'(t))\mathrm{e}^{-t^2}}_{=u'(t)}\underbrace{Q(t)}_{=v(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\underbrace{(P'(t)\mathrm{e}^{-t^2})}_{=u(t)}\underbrace{Q(t)}_{=v(t)}\right]_A^B - \int_A^B \underbrace{(P'(t)\mathrm{e}^{-t^2})}_{=u(t)}\underbrace{Q'(t)}_{=v'(t)}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$
De même :
$$\begin{aligned}\int_A^B P(t)(Q''(t) - 2tQ'(t))\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t &= \int_A^B \underbrace{P(t)}_{=u(t)}\underbrace{(Q''(t) - 2tQ(t))\mathrm{e}^{-t^2}}_{=v'(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\underbrace{P(t)}_{=u(t)}\underbrace{Q'(t)\mathrm{e}^{-t^2}}_{=v(t)}\right]_A^B - \int_A^B \underbrace{P'(t)}_{=u'(t)}\underbrace{Q'(t)\mathrm{e}^{-t^2}}_{=v(t)}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$
On combinait ces deux calculs, on obtient :
$$\int_A^B (P''(t) - 2tP'(t))Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \left[P'(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}\right]_A^B - \left[P(t)Q'(t)\mathrm{e}^{-t^2}\right]_A^B + \int_A^B P(t)(Q''(t) - 2tQ'(t))\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t.$$
Pour $A = 0$, on a :
$$\begin{aligned}\underbrace{\int_0^B (P''(t) - 2tP'(t))Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t}_{\xrightarrow[B\to+\infty]{} \int_0^{+\infty}(P''(t)-2tP'(t))Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t} &= \underbrace{P'(B)Q(B)\mathrm{e}^{-B^2}}_{\xrightarrow[B\to+\infty]{}0} - P'(0)Q(0) \\ &- \underbrace{P(B)Q'(B)\mathrm{e}^{-B^2}}_{\xrightarrow[B\to+\infty]{}0} + P(0)Q'(0) \\ &+ \underbrace{\int_0^B P(t)(Q''(t) - 2tQ'(t))\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t}_{\xrightarrow[B\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} P(t)(Q''(t)-2tQ'(t))\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t}.\end{aligned}$$

où les termes intégrés tendent vers 0 par croissance comparée et les intégrales convergent pour la même raison que la bonne définition de $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Donc :

$$\boxed{\int_0^{+\infty}(P''(t)-2tP'(t))Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = -P'(0)Q(0)+P(0)Q'(0)+\int_0^{+\infty}P(t)(Q''(t)-2tQ'(t))\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t.}$$

De même, en posant $B=0$ et en faisant tendre $A\to-\infty$, on montre que :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{0}(P''(t)-2tP'(t))Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = P'(0)Q(0)-P(0)Q'(0)+\int_{-\infty}^{0}P(t)(Q''(t)-2tQ'(t))\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t.}$$

Et donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(P''(t)-2tP'(t))Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty}P(t)(Q''(t)-2tQ'(t))\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\langle\varphi(P),Q\rangle = \langle P,\varphi(Q)\rangle.}$$

4. (a) **Remarque :** *La formule donnée ressemble beaucoup à celle utilisée pour le processus d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. En fait, c'est la même sauf qu'il n'y a pas l'étape de normalisation et il y a une division en plus pour compenser le manque de normalisation. Ce procédé modifié donne une base orthogonale plutôt que orthonormée. Mais nous allons le prouver explicitement.*

Montrons par récurrence (finie) que $(P_0,\dots,P_k)$ est une famille orthogonale de E pour tout $k\in[\![0,n]\!]$.

- **Initialisation :** Pour $k=0$, $P_0=1$ est non nul et forme bien une famille orthogonale.
- **Hérédité :** Soit $k\in[\![0,n-1]\!]$. On suppose que $(P_0,\dots,P_k)$ est une famille orthogonale. Montrons que $(P_0,\dots,P_{k+1})$ l'est aussi.

  On a déjà $\langle P_m,P_n\rangle=0$ si $m,n\in[\![0,k]\!]$ avec $m\neq n$. Il reste uniquement à calculer $\langle P_\ell,P_{k+1}\rangle$ pour tout $\ell\in[\![0,k]\!]$.

  Soit $\ell\in[\![0,k]\!]$. On a :

$$\begin{aligned}\langle P_\ell,P_{k+1}\rangle &= \langle P_\ell, X^{k+1}-\sum_{i=0}^{(k+1)-1}\frac{\langle P_i,X^{k+1}\rangle}{\langle P_i,P_i\rangle}P_i\rangle\\ &= \langle P_\ell,X^{k+1}\rangle-\sum_{i=0}^{k}\frac{\langle P_i,X^{k+1}\rangle}{\langle P_i,P_i\rangle}\underbrace{\langle P_\ell,P_i\rangle}_{=0 \text{ si } \ell\neq i}\\ &= \langle P_\ell,X^{k+1}\rangle-\frac{\langle P_\ell,X^{k+1}\rangle}{\langle P_\ell,P_\ell\rangle}\langle P_\ell,P_\ell\rangle\\ &= 0.\end{aligned}$$

  Donc $(P_0,\dots,P_{k+1})$ est orthogonale.

Par récurrence finie, $(P_0,\dots,P_k)$ est orthogonale pour tout $k\in[\![0,n]\!]$ et en particulier : $\boxed{(P_0,\dots,P_n) \text{ est orthogonale.}}$

De plus, $(P_0,\dots,P_n)$ ne contient pas de vecteur nul (car $X^k\notin\mathrm{Vect}(P_i)_{i\in[\![0,k-1]\!]}=\mathrm{Vect}(X^i)_{i\in[\![0,k-1]\!]}$) et donc $(P_0,\dots,P_n)$ est libre car orthogonale.

Par égalité des dimensions, $\boxed{\text{c'est une base orthogonale de } E.}$

(b) Comme $(P_0,\dots,P_n)$ est orthogonale et sans vecteur nul, la famille $\left(\frac{P_0}{\|P_0\|},\dots,\frac{P_n}{\|P_n\|}\right)$ est orthonormée. C'est donc une base orthonormée de E.

Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On a :

$$\begin{aligned}
\varphi(P_k) &= \sum_{i=0}^{n} \langle \varphi(P_k), \frac{P_i}{\|P_i\|} \rangle \frac{P_i}{\|P_i\|} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \langle \varphi(P_k), P_i \rangle \frac{P_i}{\|P_i\|^2} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{\langle \varphi(P_k), P_i \rangle}{\langle P_i, P_i \rangle} P_i \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\langle \varphi(P_k), P_i \rangle}{\langle P_i, P_i \rangle} P_i + \frac{\langle \varphi(P_k), P_k \rangle}{\langle P_k, P_k \rangle} P_k + \sum_{i=k+1}^{n} \frac{\langle \varphi(P_k), P_i \rangle}{\langle P_i, P_i \rangle} P_i \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\langle P_k, \varphi(P_i) \rangle}{\langle P_i, P_i \rangle} P_i + \frac{\langle \varphi(P_k), P_k \rangle}{\langle P_k, P_k \rangle} P_k + \sum_{i=k+1}^{n} \frac{\langle \varphi(P_k), P_i \rangle}{\langle P_i, P_i \rangle} P_i \\
&\quad \text{(question 3)}
\end{aligned}$$

Remarquons, comme dans la question précédente, que $R_j[X] = \mathrm{Vect}(P_0, \ldots, P_j)$ pour tout $j \in [\![0, n]\!]$.
Remarquons également que $\varphi(\mathbb{R}_j[X]) \subset \mathbb{R}_j[X]$.
Pour $i < k$, on a $P_i \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$ et donc $\varphi(P_i) \in \mathbb{R}_{k-1}[X] = \mathrm{Vect}(P_0, \ldots, P_{k-1})$. Ainsi $\langle P_k, \varphi(P_i) \rangle = 0$.
De même pour $i > k$, on a $P_k \in \mathbb{R}_k[X]$ et donc $\varphi(P_k) \in \mathbb{R}_k[X] = \mathrm{Vect}(P_0, \ldots, P_k)$. Ainsi $\langle \varphi(P_k), P_i \rangle = 0$.
Il reste donc :

$$\varphi(P_k) = \underbrace{\frac{\langle \varphi(P_k), P_k \rangle}{\langle P_k, P_k \rangle}}_{=\lambda_k} P_k.$$

Comme P_k est non nul, $\boxed{P_k \text{ est bien un vecteur propre de } \varphi.}$

Problème 4 - EDHEC ECS 2013 (Problème)

Partie I

Remarque : Cette partie permet de traiter les intégrales de Wallis. C'est un calcul très classique qui illustre beaucoup de techniques sur les suites d'intégrales sur segment. Il est bon de savoir le faire.

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t \mapsto (sint)^n$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc toutes les intégrales de cette partie sont de simples intégrales sur segment. Il n'y a pas de problème de convergence à traiter.
On a :

$$u_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^0 \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \mathrm{d}t = \boxed{\frac{\pi}{2}.}$$

Et :

$$u_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^1 \mathrm{d}t = [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \cos(0) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{1.}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n+1} \mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((\sin t)^{n+1} - (\sin t)^n\right) \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n (\sin t - 1) \, \mathrm{d}t. \\
&\quad \text{(Linéarité de l'intégrale)}
\end{aligned}$$

Or pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $0 \leq \sin(t) \leq 1$. Et donc $\sin(t) - 1 \leq 0$. D'où : $(\sin t)^n (\sin t - 1) \leq 0$. Par croissance de l'intégrale, on a donc :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n (\sin t - 1) \, \mathrm{d}t \leq 0.$$

Et donc $\boxed{u_{n+1} - u_n \leq 0}$ c'est-à-dire $\underline{(u_n) \text{ est décroissante.}}$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme précédemment, pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $0 \leq \sin(t) \leq 1$ et donc $(\sin t)^n \geq 0$. Donc par positivité de l'intégrale :

$$\boxed{u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \mathrm{d}t \geq 0.}$$

De plus $t \mapsto (\sin t)^n$ est non identiquement nulle et continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc son intégrale est non-nulle. D'où $\boxed{u_n > 0}$.

Donc (u_n) est décroissante et minorée. D'après le théorème de la limite monotone, $\underline{(u_n) \text{ est convergente.}}$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Procédons par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n+2} \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(\sin t)^{n+1}}_{= u(t)} \underbrace{(sint)}_{= v'(t)} \mathrm{d}t \\
&= \left[\underbrace{(\sin t)^{n+1}}_{= u(t)} \underbrace{(-\cos t)}_{= v(t)}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(n+1)\cos(t)(\sin t)^n}_{= u'(t)} \underbrace{(-\cos t)}_{= v(t)} \mathrm{d}t \\
&= 0 + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^2 (\sin t)^n \mathrm{d}t = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - (\sin t)^2)(\sin t)^n \mathrm{d}t \\
& \text{(car } \sin(0) = 0 \text{ et } \cos(\pi/2) = 0\text{)} \\
&= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \mathrm{d}t - (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n+2} \mathrm{d}t = (n+1)(u_n - u_{n+2}).
\end{aligned}$$

D'où $u_{n+2} + (n+1)u_{n+2} = (n+1)u_{n+1}$ c'est-à-dire :

$$\boxed{(n+2)u_{n+2} = (n+1)u_{n+1}.}$$

(b) Procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation :** pour $n = 0$, on a $u_{2\times n} = u_0 = \frac{\pi}{2}$. Et :

$$\frac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{0!}{(2^0 \times 0!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Donc on a bien $\boxed{u_{2\times 0} = \frac{(2\times 0)!}{(2^0 \times 0!)^2} \times \frac{\pi}{2}}$.

- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que :

$$u_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \times \frac{\pi}{2}.$$

Montrons la même relation pour $n+1$. On a :

$$\begin{aligned}
u_{2(n+1)} &= u_{2n+2} \\
&= \frac{2n+1}{2n+2} u_{2n} \\
&= \frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \times \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2n+1)!}{(2n+2)(2^n \times n!)^2} \times \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned}
\frac{(2(n+1))!}{(2^{n+1} \times (n+1)!)^2} \times \frac{\pi}{2} &= \frac{(2n+2)!}{(2(n+1) \times 2^n \times n!)^2} \times \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2n+2)}{(2n+2)^2} \times \frac{(2n+1)!}{(2^n \times n!)^2} \times \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2n+1)!}{(2n+2)(2^n \times n!)^2} \times \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{u_{2(n+1)} = \frac{(2(n+1))!}{(2^{n+1} \times (n+1)!)^2} \times \frac{\pi}{2}.}$$

La propriété est bien héréditaire.

Donc, par principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\boxed{u_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \times \frac{\pi}{2}.}$$

(c) On procède encore une fois par récurrence.

- **Initialisation :** On a :

$$\boxed{(0+1)u_1 u_0 = 1 \times 1 \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.}$$

- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose :

$$(n+1)u_{n+1}u_n = \frac{\pi}{2}.$$

Calculons :

$$\begin{aligned}(n+1+1)u_{n+1+1}u_{n+1} &= (n+2)u_{n+2}u_{n+1}\\ &= (n+1)u_n u_{n+1}\\ &= \boxed{\frac{\pi}{2}.}\end{aligned}$$

On a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{(n+1)u_{n+1}u_n = \frac{\pi}{2}.}$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$(2n+1)u_{2n+1}u_{2n} = \frac{\pi}{2}.$$

Donc :

$$\begin{aligned}u_{2n+1} &= \frac{\pi}{2(2n+1)u_{2n}}\\ &= \frac{\pi}{2(2n+1)\frac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \times \frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{(2^n \times n!)^2}{(2n+1)(2n)!}\\ &= \boxed{\frac{(2^n \times n!)^2}{(2n+1)!}.}\end{aligned}$$

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{u_{n+2}}{u_n} = \frac{n+1}{n+2}.$$

On a donc :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+2}}{u_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1.}$$

(b) Comme (u_n) est décroissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \geq u_{n+1} \geq u_{n+2}.$$

Comme $u_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$1 \geq \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{u_{n+2}}{u_n}.$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.}$$

(c) D'après la question précédente, on déduit que $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$. Donc :

$$(n+1)u_{n+1}u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} nu_n^2.$$

Or $(n+1)u_{n+1}u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$ puisque $(n+1)u_{n+1}u_n \to \frac{\pi}{2} \neq 0$. D'où $nu_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$ que l'on peut écrire :

$$u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}.$$

Attention ! On ne compose pas avec la racine. Il faut démontrer que ça marche dans ce cas spécifique, et la composition ne marche pas dans le cas général (par exemple ça ne marche presque jamais en composant par une exponentielle).

On a donc :

$$\begin{aligned}
\frac{u_n}{\sqrt{\frac{\pi}{2n}}} &= \sqrt{\frac{u_n^2}{\frac{\pi}{2n}}} \\
&\quad (\text{car } u_n \geq 0) \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 (\text{car la racine est continue en } 1)
\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.}$$

Partie II

4. L'intégrale est généralisée en -1 et en 1 (le dénominateur s'annule en ces points). On a :

$$\frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} \underset{t\to1}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{1-t^2}} \underset{t\to1}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{(1-t)(1+t)}} \underset{t\to1}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}.$$

Or $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t$ est convergente d'après le critère de Riemann. Par comparaison d'intégrale de fonctions positives, $\underline{\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \text{ est convergente.}}$

De même :

$$\frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} \underset{t\to-1}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{2}\sqrt{1+t}}.$$

Et comme $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1+t}}\mathrm{d}t$ est convergente, $\underline{\int_{-1}^0 \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \text{ l'est aussi.}}$

<u>Donc l'intégrale $I(x)$ est convergente.</u>

5. (a) Soit $x > 0$. Pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$$0 \leq \mathrm{e}^{-tx} \leq 1.$$

Donc pour tout $t \in [0,1[$:

$$0 \leq \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Par croissance de l'intégrale, on a :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t.$$

Or pour les mêmes raisons que dans la question précédente $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$ converge.

En posant :

$$\boxed{M = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t,}$$

on a : $0 \leq \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \leq M$ avec M indépendant de x.

(b) Pour $0 \leq u \leq \frac{1}{2}$, on a : $\frac{1}{2} \leq 1-u \leq 1$. Par croissance de la racine, on a donc :

$$\sqrt{1-u} \leq 1.$$

Puis par décroissance de l'inverse :

$$\boxed{1 \leq \frac{1}{\sqrt{1-u}}.}$$

Pour la seconde partie de l'inégalité, posons :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \left[0, \frac{1}{2}\right] & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & 1+u-\frac{1}{\sqrt{1-u}}. \end{array} \right.$$

f est dérivable et pour tout u on a :

$$f'(u) = 1 - \frac{1}{2}(1-u)^{-\frac{3}{2}}.$$

Pour $u \in [0,1/2] \subset [0,1]$, on a $1-u \in [0,1]$ et donc $(1-u)^{-\frac{3}{2}} \in [0,1]$. Puis $f'(u) \in [1/2,1]$. La dérivée est ainsi positive et donc f est croissante. De plus $f(0)=0$. Donc f est positive sur $[0,1/2]$.
D'où effectivement :

$$\boxed{\forall u \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \ 1 \leq \frac{1}{\sqrt{1-u}} \leq 1+u.}$$

6. (a) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ est la densité de la loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$. Donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t = 1.$$

D'où, par parité de l'intégrande :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\sigma.$$

Donc pour $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on a :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

De même puisque la variance de la loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ est σ^2, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t-0)^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t = \sigma^2.$$

Et donc :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.}$$

(b) Le changement est $\mathcal{C}^1$ strictement monotone et donc on peut l'appliquer à une intégrale généralisée. On a $\mathrm{d}t = \frac{2u\mathrm{d}u}{x}$ et donc les intégrales :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \text{ et } \int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-u^2}\frac{2\mathrm{d}u}{\sqrt{x}}$$

ont même nature et sont égales en cas de convergence. Or :

$$\int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-u^2}\frac{2\mathrm{d}u}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u$$

est une intégrale sur segment donc convergente. D'où :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u.}$$

Or $\int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u \xrightarrow[x\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Donc :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{x}}.}$$

(c) De même, on a :

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-tx}\sqrt{t}\mathrm{d}t = \int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-u^2}\frac{u}{\sqrt{x}}\frac{2u\mathrm{d}u}{x} = \frac{2}{x\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} u^2\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u.$$

Or $\int_0^{\sqrt{x}} u^2\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\sqrt{\pi}}{4}$. Donc :

$$\boxed{\int_0^1 \mathrm{e}^{-tx}\sqrt{t}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2x\sqrt{x}}.}$$

7. (a) C'est encore un changement $\mathcal{C}^1$ strictement monotone. On a $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u$. Et donc les intégrales :

$$\int_{-1}^0 \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \text{ et } \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(u-1)x}}{\sqrt{1-(u-1)^2}}\mathrm{d}u$$

ont la même nature et sont égales en cas de convergence. On a déjà établi la convergence de l'intégrale de gauche. On a donc :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t &= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(u-1)x}}{\sqrt{1-(u-1)^2}}\mathrm{d}u \\ &= \mathrm{e}^x\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{-u^2+2u}}\mathrm{d}u \\ &= \mathrm{e}^x\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u(2-u)}}\mathrm{d}u\end{aligned}$$

et donc :

$$\boxed{\int_{-1}^0 \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u\left(1-\frac{u}{2}\right)}}\mathrm{d}u.}$$

(b) **Attention !** Même si c'est tentant, pas de sommes d'équivalents !
Soit $x > 0$. Calculons :

$$\frac{I(x)}{\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2\pi x}}} = \frac{\sqrt{2\pi x}I(x)}{\mathrm{e}^x} = \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{\pi}\mathrm{e}^x}\left(\int_{-1}^0 \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t\right).$$

Or :

$$0 \leq \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \leq M.$$

Donc :

$$0 \leq \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{\pi}\mathrm{e}^x}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \leq \frac{\sqrt{2\pi x}M}{\mathrm{e}^x}.$$

Par croissance comparée, on a $\frac{\sqrt{x}}{\mathrm{e}^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Donc par encadrement :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{\pi}\mathrm{e}^x}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} = 0.}$$

En outre :

$$\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{\pi}\mathrm{e}^x}\int_{-1}^0 \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{\pi}\mathrm{e}^x}\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u\left(1-\frac{u}{2}\right)}}\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{x}{\pi}}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u\left(1-\frac{u}{2}\right)}}\mathrm{d}u.$$

Or pour $u \in [0,1]$, on a $\frac{u}{2} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Donc :

$$1 \leq \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u}{2}}} \leq 1 + \frac{u}{2}.$$

Comme $\frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}} > 0$ pour $u \in]0,1]$, on a :

$$\frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}} \leq \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u\left(1-\frac{u}{2}\right)}} \leq \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}}\left(1+\frac{u}{2}\right).$$

Et par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u \leq \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u\left(1-\frac{u}{2}\right)}}\mathrm{d}u \leq \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}}\left(1+\frac{u}{2}\right)\mathrm{d}u.$$

Et enfin :

$$\underbrace{\sqrt{\frac{x}{\pi}}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u}_{\to 1} \leq \sqrt{\frac{x}{\pi}}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u\left(1-\frac{u}{2}\right)}}\mathrm{d}u \leq \underbrace{\sqrt{\frac{x}{\pi}}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u}_{\to 1} + \underbrace{2\sqrt{\frac{x}{\pi}}\int_0^1 \mathrm{e}^{-ux}\sqrt{u}\mathrm{d}u}_{\sim \frac{1}{x}\to 0}.$$

Donc par encadrement :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x}{\pi}}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u\left(1-\frac{u}{2}\right)}}\mathrm{d}u = 1.}$$

Ainsi :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{I(x)}{\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2\pi x}}} = 1.$$

Et donc :

$$\boxed{I(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2\pi x}}.}$$

Partie III

8. Les événements $[X=k]$ pour $k \in \mathbb{N}$ forment un système complet d'événements. En appliquant la formule des probabilités totales, on a donc :

$$\begin{aligned} P(X=Y) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P([X=k]\cap[X=Y]) = \sum_{k=0}^{+\infty} P([X=k]\cap[Y=k]) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)P(Y=k) \\ &\quad \text{(car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes)} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \times \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \boxed{\mathrm{e}^{-2\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2}.} \\ &\quad \text{(car } X, Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)\text{)} \end{aligned}$$

9. (a) Distinguons deux cas :
   - **Si $t \geq 0$, alors** $-tx \leq 0$ et ainsi $u \leq 0$. Donc $\boxed{\mathrm{e}^u \leq 1 < \mathrm{e}^x}$.
   - **Si $t < 0$, alors** $-tx > 0$ et ainsi $0 \leq u \leq -tx \leq x$. Donc $\boxed{\mathrm{e}^u \leq \mathrm{e}^x}$ par croissance de l'exponentielle.

Soit $f : [-x,x] \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^{2n+1}$ (comme $t \in [-1,1]$, l'intervalle $[-x,x]$ couvre toutes les possibilités). On a d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre $2n$:

$$\forall u \in [-x,x], \quad \left| f(u) - \sum_{k=0}^{2n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} u^k \right| \leq \frac{|u|^{2n+1}}{(2n+1)!} M.$$

où M est un majorant de $|f^{(2n+1)}|$. Appliqué à l'exponentielle, cela donne :

$$\boxed{\forall u \in [-x,x], \quad \left| \mathrm{e}^u - \sum_{k=0}^{2n} \frac{u^k}{k!} \right| \leq \frac{|u|^{2n+1}}{(2n+1)!} \mathrm{e}^x.}$$

puisque e^x est majorant de $\exp^{(2n+1)} = \exp$ sur l'intervalle considéré.

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $u \mapsto \sin(u)$ est $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone (croissante). On peut donc faire le changement de variable $t = \sin(u)$.
On a $\mathrm{d}t = -\cos(u)\mathrm{d}u$. Donc les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t \text{ et } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(u)^k}{\sqrt{1-(\sin(u))^2}} \cos(u)\mathrm{d}u$$

ont même nature et sont égales en cas de convergence. Or :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(u)^k}{\sqrt{1-(\sin(u))^2}} \cos(u)\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(u))^k \mathrm{d}u = u_k$$

puisque $\cos(u) \geq 0$ entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. D'où les intégrales convergent et :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t = u_k.}$$

(c) Soit $x > 0$. Pour tout $t \in [-1,1]$, on a :

$$\left| \mathrm{e}^{-tx} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(tx)^k}{(k!)} \right| \leq \frac{|tx|^{2n+1}}{(2n+1)!} \mathrm{e}^x.$$

Comme $\frac{1}{1-t^2} > 0$ pour tout $t \in]-1,1[$, on a sur ce même intervalle :

$$\left| \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(tx)^k}{(k!)\sqrt{1-t^2}} \right| \leq \frac{|tx|^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Puis par inégalité triangulaire pour l'intégrale généralisée et sous réserve de convergence :

$$\left| \int_{-1}^1 \left(\frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(tx)^k}{(k!)\sqrt{1-t^2}} \right) \mathrm{d}t \right| \leq \int_{-1}^1 \left| \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(tx)^k}{(k!)\sqrt{1-t^2}} \right| \mathrm{d}t$$

et donc par croissance de l'intégrale :

$$\int_{-1}^1 \left| \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(tx)^k}{(k!)\sqrt{1-t^2}} \right| \mathrm{d}t \leq \int_{-1}^1 \frac{|tx|^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t.$$

Or $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t = \pi I(x)$. De plus, pour $k = 2i+1$ impaire, $t \mapsto \frac{(tx)^k}{(k!)\sqrt{1-t^2}}$ est impaire et donc

$\int_{-1}^{1} \frac{(tx)^k}{(k!)\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = 0$. Pour $k = 2i$ pair, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{(tx)^k}{(k!)\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t &= \frac{x^k}{k!}\int_{-1}^{1} \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \\
&= 2\frac{x^k}{k!}\int_{0}^{1} \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \\
&\text{(par parité de l'intégrande)} \\
&= 2\frac{x^k}{k!}u_k \\
&= 2\frac{x^{2i}}{(2i)!}u_{2i} \\
&= 2\frac{x^{2i}}{(2i)!}\frac{(2i)!}{(2^i \times i!)^2} \times \frac{\pi}{2} \\
&= \pi\frac{x^{2i}}{2^{2i}(i!)^2}.
\end{aligned}$$

En divisant tout par π, on a donc :

$$\boxed{\left| I(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}} \right| \leq \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{|tx|^{2n+1}}{(2n+1)!}\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t}$$

et la convergence du terme de gauche est assurée. Traitons rapidement le terme de droite. L'intégrande est paire et donc :

$$\int_{-1}^{1} \frac{|tx|^{2n+1}}{(2n+1)!}\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{1} \frac{|tx|^{2n+1}}{(2n+1)!}\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{1} \frac{(tx)^{2n+1}}{(2n+1)!}\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t.$$

D'où :

$$\boxed{\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{|tx|^{2n+1}}{(2n+1)!}\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\frac{x^{2n+1}\mathrm{e}^x}{(2n+1)!}\int_{0}^{1} \frac{t^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\frac{x^{2n+1}\mathrm{e}^x}{(2n+1)!}u_{2n+1}}$$

et encore une fois l'intégrale converge. D'où :

$$\boxed{\left| I(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}} \right| \leq \frac{2x^{2n+1}\mathrm{e}^x}{\pi(2n+1)!}u_{2n+1}.}$$

(d) Soit $x > 0$. Comme :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

on a :

$$\frac{u_{2n+1}}{(2n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Donc par encadrement :

$$I(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

D'où :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} I(x)$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}} = I(x).}$$

10. On a :

$$P(X=Y) = \mathrm{e}^{-2\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2} = \mathrm{e}^{-2\lambda} I(2\lambda).$$

Or :

$$I(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2\pi x}}$$

Donc :

$$\mathrm{e}^{-2\lambda} I(2\lambda) \underset{\lambda\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{4\pi\lambda}} \underset{\lambda\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda}}.$$

D'où :

$$\boxed{P(X=Y) \underset{\lambda\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda}}.}$$