

CORRECTION DS4 APPLI - RÉDUCTION, ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Exercice 1 - EDHEC ECE 2020 (Exercice 1 - adapté)

1. Vérifions que $A_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$:

- $A_n(\mathbb{R})$ est bien un sous-ensemble de $M_n(\mathbb{R})$ par définition ;
- La matrice nulle vérifie : ${}^t0_n = 0_n = -0_n$ et est donc antisymétrique. Donc $A_n(\mathbb{R})$ n'est pas vide.
- Soient $M, N \in A_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda M + N \in A_n(\mathbb{R})$. On a :

$${}^t(\lambda M + N) = \lambda \underbrace{{}^tM}_{=-M} + \underbrace{{}^tN}_{=-N} = -\lambda M - N = -(\lambda M + N).$$

Donc $\lambda M + N \in A_n(\mathbb{R})$ et ainsi $A_n(\mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire.

Donc $A_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.

2. (a) On a :

$$\begin{aligned} {}^tf(M) &= {}^t({}^tA)M + MA \\ &= {}^tM{}^t({}^tA) + {}^tA{}^tM \\ &= -MA - {}^tAM \\ &= -({}^tAM + MA) \\ &= -f(M). \end{aligned}$$

Donc $f(M) \in A_n(\mathbb{R})$.

(b) Vérifions que f est une application linéaire. Pour $M, N \in A_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(M + \lambda N) &= ({}^tA)(M + \lambda N) + (M + \lambda N)A \\ &= ({}^tA)M + \lambda({}^tA)N + MA + \lambda NA \\ &= (({}^tA)M + MA) + \lambda(({}^tA)N + NA) \\ &= f(M) + \lambda f(N). \end{aligned}$$

Donc f est bien une application linéaire définie sur $A_n(\mathbb{R})$.

De plus, d'après la question précédente, l'image de f est bien incluse dans $A_n(\mathbb{R})$. C'est donc une application linéaire de $A_n(\mathbb{R})$ dans lui-même : f est un endomorphisme de $A_n(\mathbb{R})$.

3. (a) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
 M \in A_3(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow {}^tM = -M \\
 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a = -a \\ d = -b \\ g = -c \\ b = -d \\ e = -e \\ h = -f \\ c = -g \\ f = -h \\ i = -i \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ e = 0 \\ i = 0 \\ d = -b \\ g = -c \\ h = -f \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow M = bJ + cK + fL.
 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathcal{B} = (J, K, L) \text{ engendre bien } A_3(\mathbb{R})}$.

- (b) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$aJ + bK + cL = 0.$$

Montrons que $a = b = c = 0$.

On a donc :

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Et donc on a bien $a = b = c = 0$. Donc $\boxed{\mathcal{B} \text{ est libre.}}$

On a déjà montré que $\mathcal{B}$ engendre $A_3(\mathbb{R})$. Donc c'est une base de $A_3(\mathbb{R})$. On en déduit :

$$\boxed{\dim A_3(\mathbb{R}) = 3.}$$

4. (a) On a :

$$\begin{aligned}
 f(J) &= ({}^tA)J + JA \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{-J - L.}
 \end{aligned}$$

On trouve de même :

$$\begin{aligned}
 f(K) &= {}^t A K + K A \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{0_3}
 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
 f(L) &= {}^t A L + L A \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{-L}.
 \end{aligned}$$

(b) On a :

$$\begin{aligned}
 \text{Im}(f) &= \text{Vect}(f(J), f(K), f(L)) \\
 &= \text{Vect}(-J - L, 0, -L) \\
 &= \text{Vect}(J + L, 0, L) \\
 C_1 &\leftarrow -C_1 \\
 C_3 &\leftarrow -C_3 \\
 &= \text{Vect}(J + L, L) \\
 &\stackrel{C_1 \leftarrow -C_1 - C_3}{=} \text{Vect}(J, L).
 \end{aligned}$$

Donc (J, L) engendre $\text{Im}(f)$.

Or (J, L) est libre (c'est une sous-famille de famille libre). $\boxed{(J, L) \text{ est donc une base de } \text{Im} f.}$

(c) D'après le théorème de rang, on a donc :

$$\underbrace{\dim \text{Im}(f)}_{=2} + \dim \text{Ker}(f) = \underbrace{\dim A_3(\mathbb{R})}_{=3}.$$

D'où :

$$\boxed{\dim \text{Ker}(f) = 1.}$$

Comme $f(K) = 0$, on a $K \in \text{Ker}(f)$. (K) est une famille d'un vecteur non-nul, elle est donc libre. Et comme $\dim \text{Ker}(f) = 1 = \text{card}(K)$, $\boxed{(K) \text{ est une base de } \text{Ker}(f).}$

5. (a) D'après ce qui précède, on a :

$$\boxed{F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

Les coefficients sont bien tous 0 ou -1 .

(b) Comme F est triangulaire, les valeurs propres se lisent sur la diagonale. On a :

$$\boxed{\text{Sp}(F) = \{-1, 0\}.}$$

(c) Commençons par constater que :

$$E_0(F) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Cela se déduit des calculs précédents puisque $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est la représentation matricielle de K et que les calculs de $E_0(F)$ reviennent au calcul du noyau de f .

$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre (un vecteur non nul) et $\boxed{\text{est donc une base de } E_0(F).}$ D'où $\boxed{\dim E_0(F) = 1.}$

Déterminons $E_{-1}(F)$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} X \in E_{-1}(F) &\Leftrightarrow FX = -X \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -x \\ 0 \\ -x - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -x &= -x \\ 0 &= -y \\ -x - z &= -z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow X \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Donc $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ engendre $E_{-1}(F)$. C'est aussi est une famille libre (un vecteur non nul) et

$\boxed{\text{est donc une base de } E_{-1}(F).}$ D'où $\boxed{\dim E_{-1}(F) = 1.}$

- (d) F n'est pas diagonalisable. En effet, si F était diagonalisable, il existera une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de F .

Comme $\dim M_{3,1}(\mathbb{R}) = 3$. Donc une telle base aurait 3 vecteurs. Notons-les (U, V, W) .

Pour que la famille soit libre, il ne peut pas y avoir plus de 1 vecteur de $E_0(F)$. Et pour la même raison, il ne peut pas y avoir plus de 1 vecteur de $E_{-1}(F)$. Donc une telle famille libre ne peut avoir plus de 2 vecteurs.

C'est une contradiction, donc $\boxed{F \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

Exercice 2 - Exercice original

Partie I - Une équation différentielle

1. $y'' - 4y' + 4y = 0$ est l'équation homogène associée..

Son équation caractéristique est $r^4 - 4r + 4 = 0$ qui peut aussi s'écrire $(r - 2)^2 = 0$ et qui a donc une unique solution double $r = 2$.

Ainsi $\boxed{\text{les solutions de } y'' - 4y' + 4y = 0 \text{ sont les fonctions de la forme } t \mapsto (A + Bt)e^{2t} \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}.}$

2. (a) Soit Y_0 définie par $Y_0(t) = P(t)e^{2t}$. On a :

$$\begin{aligned} Y_0 \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, Y_0''(t) - 4Y_0'(t) + Y_0(t) = t^2 e^{2t} \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, P''(t)e^{2t} + 4P'(t)e^{2t} + 4P(t)e^{2t} - 4P'(t)e^{2t} - 8P(t)e^{2t} + 4P(t)e^{2t} = t^2 e^{2t} \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, P''(t)e^{2t} = t^2 e^{2t} \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, P''(t) = t^2. \end{aligned}$$

- (b) Une primitive de $t \mapsto t^2$ est $t \mapsto \frac{t^3}{3}$ et une primitive de $t \mapsto \frac{t^3}{3}$ est $t \mapsto \frac{t^4}{12}$. Ainsi Y_0 définie par :

$$Y_0(t) = \frac{t^4}{12} e^{2t}$$

est une solution particulière de (E) .

3. Les solutions de (E) sont les fonctions somme de la solution particulière trouvée et d'une solution de l'équation homogène.

Ainsi, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme :

$$t \mapsto \left(\frac{t^4}{12} + A + Bt \right) e^{2t}$$

où $A, B \in \mathbb{R}$.

Partie II - Une équation fonctionnelle

4. (a) Si $f(0) = 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'après $(\star)$, on a :

$$f(x) = f(x+0) = f(x)f(0) = f(x) \times 0 = 0.$$

Et donc f est identiquement nulle.

- (b) Pour $x = y = 0$, $(\star)$ donne :

$$\underbrace{f(0+0)}_{=f(0)} = f(0)f(0).$$

Donc $f(0)$ est solution de $x = x^2$. Donc nécessairement $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

Or si $f(0) = 0$, d'après la question précédente, f est identiquement nulle, cas qui est rejeté désormais.

Donc nécessairement $f(0) = 1$.

- (c) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$. On a :

$$f(x+h) = f(x)f(h).$$

Puis :

$$f(x+h) - f(x) = f(x)f(h) - f(x)$$

et donc :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(x)f(h) - f(x)}{h}.$$

D'où en factorisant :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f(x) \frac{f(h) - 1}{h}.$$

Or $f(0) = 1$. Et donc finalement :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f(x) \frac{f(h) - f(0)}{h}.$$

- (d) Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

De même, on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0).$$

Donc par passage à la limite de l'équation précédente, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x)f'(0).$$

Donc en posant $\lambda = f'(0)$, f vérifie bien l'équation :

$$y' = \lambda y.$$

- (e) L'équation précédente est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants et homogène. Ses solutions sont les fonctions de la forme : $x \mapsto A \exp(\lambda x)$ avec $A \in \mathbb{R}$.
- (f) Donc si f vérifie $(\star)$, soit $f = 0$, soit f est de la forme $f : x \mapsto A \exp(\lambda x)$.
 Dans ce dernier cas, on a $f(0) = 1$ et donc :

$$\underbrace{A \exp(\lambda \times 0)}_{=A} = 1$$

Puis, en posant $a = e^\lambda$ (qui est strictement positif), on a donc :

$$f(x) = a^x.$$

Et donc si f vérifie $(\star)$, soit f est la fonction nulle, soit f est de la forme $x \mapsto a^x$ avec $a > 0$.

5. Si $a > 0$, posons $f(x) = a^x$. On a alors pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(x+y) = a^{x+y} = a^x a^y = f(x)f(y).$$

Et donc f vérifie $(\star)$.

6. Dans la première question, on a montré que si f est dérivable et vérifie $(\star)$ alors soit f est la fonction nulle, soit f est de la forme $x \mapsto a^x$ avec $a > 0$.

Évidemment la fonction nulle vérifie $(\star)$ et est dérivable. Et dans la question précédente, on a vérifié que la fonction $x \mapsto a^x$ vérifie $(\star)$. Elle est également dérivable par opérations sur les fonctions usuelles.

Donc l'ensemble des fonctions dérivables vérifiant $(\star)$ est l'ensemble constitué de la fonction nulle et des fonctions de la forme $x \mapsto a^x$ avec $a > 0$.

Exercice 3 - ECRICOME ECE 2021 (Exercice 1 - adapté)

Partie I - Exemples de matrices appartenant à $\mathcal{A}$.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \alpha I_3 \in \mathcal{A} &\Leftrightarrow (\alpha I_3)(\alpha I_3 + I_3)(\alpha I_3 + 2I_3) = 0_3 \\ &\Leftrightarrow \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)I_3 = 0_3 \\ &\Leftrightarrow \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha \in \{0, -1, -2\}. \end{aligned}$$

2. $\mathcal{A}$ n'est pas un espace vectoriel. En effet, d'après le résultat précédent, $\mathcal{A}$ n'est pas stable par combinaison linéaire.

3. (a) On a :

$$BX_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2X_1.$$

De même, on a :

$$BX_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -X_2.$$

- (b) Comme $X_1 \neq 0$, X_1 est un vecteur propre et donc $-2 \in \text{Sp}(B)$.

De même, comme $X_2 \neq 0$, $-1 \in \text{Sp}(B)$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
 X \in E_{-2}(B) &\Leftrightarrow BX = -2X \\
 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} -x - y + z = -2x \\ x - 3y + z = -2y \\ x - y - z = -2z \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow x - y + z = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow X \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).
 \end{aligned}$$

Donc $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ engendre $E_{-2}(B)$. La famille est de plus libre (2 vecteurs non colinéaires).

C'est donc une base de $E_{-2}(B)$.

De même, on a :

$$\begin{aligned}
 X \in E_{-2}(B) &\Leftrightarrow BX = -2X \\
 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} -x - y + z = -x \\ x - 3y + z = -y \\ x - y - z = -z \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} -y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 - L_3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -y + z = 0 \\ 0 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} z = y \\ x = y \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow X \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).
 \end{aligned}$$

Donc $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ engendre $E_{-1}(B)$. La famille est de plus libre (1 vecteur non nul).

C'est donc une base de $E_{-1}(B)$.

(c) La famille concaténée $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est donc libre (concaténation de familles libres de sous-espaces propres distincts). Et comme $\dim M_{3,1}(\mathbb{R}) = 3 = \text{card} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, la famille est en fait une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$.

Donc il existe une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de B . Donc $\boxed{B \text{ est diagonalisable.}}$

On a alors :

$$\boxed{B = PDP^{-1}}$$

avec :

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .}$$

P est bien inversible puisque c'est la matrice de passage de la base canonique à la base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

(d) On a :

$$\begin{aligned} & D(D + I_3)(D + 2I_3) \\ = & \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ = & \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Donc $\boxed{D \in \mathcal{A}.}$

On a alors :

$$\begin{aligned} B(B + I_3)(B + 2I_3) &= PDP^{-1}(PDP^{-1} + I_3)(PDP^{-1} + 2I_3) \\ &= PDP^{-1}(PDP^{-1} + PI_3P^{-1})(PDP^{-1} + 2PP^{-1}) \\ &= PDP^{-1}P(D + I_3)P^{-1}P(D + 2I_3)P^{-1} \\ &= PD(D + I_3)(D + 2I_3)P^{-1} \\ &= P0_3P^{-1} \\ &= 0_3. \end{aligned}$$

Et donc $\boxed{B \in \mathcal{A}.}$

4. On peut écrire $M = PDP^{-1}$ avec P inversible et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ où $\lambda_i \in \{0, -1, -2\}$.

On calcule :

$$\begin{aligned}
 & D(D + I_3)(D + 2I_3) \\
 = & \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\
 = & \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 + 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 + 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 + 2 \end{pmatrix} \\
 = & \begin{pmatrix} \lambda_1(\lambda_1 + 1)(\lambda_1 + 2) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2(\lambda_2 + 1)(\lambda_2 + 2) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3(\lambda_3 + 1)(\lambda_3 + 2) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Or les valeurs propres étant dans $\{0, -1, -2\}$, elles sont racines de $x(x+1)(x+2)$. On a donc :

$$D(D + I_3)(D + 2I_3) = 0_3.$$

Et ainsi $D \in \mathcal{A}$.

Et ensuite, comme à la question précédente, on en déduit $M \in \mathcal{A}$.

Partie II - Diagonalisabilité des matrices de $\mathcal{A}$.

5. On a clairement $x(x+1)(x+2)$ est annulateur de M . Comme les racines de $x(x+1)(x+2)$ sont 0, -1 et -2 , on a donc :

$$\text{Sp}(M) \subset \{0, -1, -2\}.$$

6. Si $\text{Sp}(M) = \{0, -1, -2\}$ alors M admet 3 valeurs propres distinctes tout en étant d'ordre 3.

M est donc diagonalisable.

7. (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $M - \lambda I_3$ est non-inversible si et seulement si $\lambda \in \text{Sp}(M)$. Donc si -1 est l'unique valeur propre, ni 0, ni 2 ne sont valeurs propres et donc M et $M + 2I_3$ sont inversibles.

Puis comme $M(M + I_3)(M + 2I_3) = 0_3$, en multipliant à gauche par M^{-1} et à droite par $(M + 2I_3)^{-1}$, on obtient :

$$M + I_3 = 0_3$$

c'est-à-dire $M = -I_3$.

- (b) On procède exactement de la même manière si $\text{Sp}(M) = \{-2\}$. Dans ce cas, M et $M + I_3$ sont inversibles. On a en multipliant à gauche par $(M + I_3)^{-1}M^{-1}$:

$$M + 2I_3 = 0_3$$

et donc $M = -2I_3$.

De même, si $\text{Sp}(M) = \{0\}$, on obtient : $M = 0_3$.

8. Comme $\text{Sp}(M) = \emptyset$, $M - \lambda I_3$ est inversible pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

En particulier, M , $M + I_3$ et $M + 2I_3$ sont inversibles.

On part de la formule :

$$M(M + I_3)(M + 2I_3) = 0_3.$$

En multipliant par $(M + 2I_3)^{-1}(M + I_3)^{-1}M^{-1}$ à gauche, on obtient :

$$I_3 = 0_3$$

ce qui est évidemment absurde. Ainsi le spectre de M est nécessairement non vide.

9. (a) Puisque 0 n'est pas valeur propre, M est inversible. En multipliant à gauche par M^{-1} la relation de départ, on obtient :

$$(M + I_3)(M + 2I_3) = 0.$$

Cela implique pour l'application f :

$$(f + \text{Id}) \circ (f + 2\text{Id}) = 0.$$

Pour la seconde égalité, il suffit de constater que :

$$(f + \text{Id}) \circ (f + 2\text{Id}) = f^2 + f + 2f + 2\text{Id} = f^2 + 3f + 2\text{Id}$$

et :

$$(f + 2\text{Id}) \circ (f + \text{Id}) = f^2 + 2f + f + 2\text{Id} = f^2 + 3f + 2\text{Id} = (f + 2\text{Id}) \circ (f + \text{Id}) = 0.$$

- (b) Comme M admet -1 comme valeur propre, $M + I_3$ est non-inversible. Donc $f + \text{Id}$ est non bijective. Comme $f + \text{Id}$ est un endomorphisme en dimension finie, cela implique que $f + \text{Id}$ est non-injective (en effet elle est soit non-injective, soit non-surjectif, mais dans ce cas, les deux sont équivalents).

Donc $\text{Ker}(f + \text{Id}) \neq \{0\}$ et donc :

$$\dim \text{Ker}(f + \text{Id}) \geq 1.$$

On a exactement de la même manière :

$$\dim \text{Ker}(f + 2\text{Id}) \geq 1$$

en considérant que $-2 \in \text{Sp}(M)$.

- (c) i. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$. Montrons que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Appliquons f , qui est linéaire, à l'égalité. On obtient :

$$\alpha \underbrace{f(u)}_{=-u} + \beta \underbrace{f(v)}_{=-v} + \gamma \underbrace{f(w)}_{=-2w} = 0.$$

Et donc :

$$\alpha u + \beta v + 2\gamma w = 0.$$

En faisant la différence des deux équations, on obtient :

$$\gamma w = 0.$$

Et comme $w \neq 0$, on en déduit $\gamma = 0$.

Ainsi $\alpha u + \beta v = 0$. Or (u, v) est libre. Donc $\alpha = \beta = 0$.

Ainsi (u, v, w) est libre.

- ii. Or $\dim \mathbb{R}^3 = 3 = \text{card}(u, v, w)$. Donc (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$. Les vecteurs colonnes U, V, W dans la base canonique, sont donc une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$.

On voit par un rapide calcul que $MU = -U$, $MV = -V$ et $MW = -2W$.

Donc il existe une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de M . Donc M est diagonalisable.

Mais c'est contraire à l'hypothèse initiale. Donc $\dim \text{Ker}(f + \text{Id}) < 2$ et ainsi :

$$\dim \text{Ker}(f + \text{Id}) = 1.$$

- (d) i. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha u + \beta v = 0$. Montrons que $\alpha = \beta = 0$.

Appliquons f , qui est linéaire, à l'égalité. On obtient :

$$\alpha \underbrace{f(u)}_{=-u} + \beta \underbrace{f(v)}_{=-2v} = 0.$$

Et donc :

$$\alpha u + 2\beta v = 0.$$

En faisant la différence entre les deux équations, on obtient :

$$\beta v = 0$$

et comme $v \neq 0$, on en déduit : $\beta = 0$.

Ainsi $\alpha u = 0$ et de même $\alpha = 0$.

Ainsi (u, v) est libre.

ii. Montrons que (u, v, w) est libre.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$. Montrons que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Si $\gamma \neq 0$, on a :

$$w = -\frac{1}{\gamma}(\alpha u + \beta v)$$

Et donc $w \in \text{Vect}(u, v)$, ce qui est faux. Donc $\gamma = 0$.

D'où $\alpha u + \beta v = 0$. Or (u, v) est libre. Donc $\alpha = \beta = 0$.

Donc (u, v, w) est libre. Et comme $\dim \mathbb{R}^3 = 3 = \text{card}(u, v, w)$, (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

iii. Puisque $(f + \text{Id}) \circ (f + 2\text{Id})(w) = 0$, on a $(f + 2\text{Id})(w) \in \text{Ker}(f + \text{Id})$. Or $\dim \text{Ker}(f + \text{Id}) = 1$.
Donc $u \in \text{Ker}(f + \text{Id}) \setminus \{0\}$ en forme une base.

Donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$(f + 2\text{Id})(w) = \alpha u.$$

Ainsi :

$$f(w) + 2w = \alpha u.$$

On a de même, en partant de $(f + 2\text{Id}) \circ (f + \text{Id})(w) = 0$:

$$f(w) + w = \beta v$$

avec $\beta \in \mathbb{R}$.

En faisant la différence des deux équations, on obtient :

$$w = \alpha u - \beta v$$

et donc $w \in \text{Vect}(u, v)$, ce qui est faux.

Ainsi l'hypothèse de départ (M n'est pas diagonalisable) est fausse et donc M est diagonalisable.

10. On a montré en première partie que M est diagonalisable et $\text{Sp}(M) \subset \{0, -1, -2\}$ implique $M \in \mathcal{A}$.

On a montré en question 5 que si $M \in \mathcal{A}$ alors $\text{Sp}(M) \subset \{0, -1, -2\}$.

Et on a montré dans les questions qui suivent que $M \in \mathcal{A}$ implique que M est diagonalisable.

Ainsi, on a bien :

$$M \in \mathcal{A} \Leftrightarrow M \text{ est diagonalisable et } \text{Sp}(M) \subset \{0, -1, -2\}.$$

Problème 4 - ECRICOME ECE 2020 (Exercice 3)

1. $I_n(a)$ est une intégrale de Riemann convergente ($n \geq 2 > 1$).

De plus, pour $A > a$, on a :

$$\int_a^A \frac{1}{t^n} dt = \left[\frac{t^{-n+1}}{-n+1} \right]_a^A = \underbrace{\frac{A^{-n+1}}{-n+1} - \frac{a^{-n+1}}{-n+1}}_{\xrightarrow[A \rightarrow +\infty]{-0}} \xrightarrow[A \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{(n-1)a^{n-1}}.$$

Donc :

$$I_n(a) = \frac{1}{(n-1)a^{n-1}}.$$

2. (a) On a :

- f est positive sur $\mathbb{R}$.
- f est continue sur $]-\infty, a[$ et sur $]a, +\infty[$ par opérations sur les fonctions usuelles. Donc f est continue sur

- Sous réserve de convergence, on a par la relation de Chasles :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^a f(t)dt + \int_a^{+\infty} f(t)dt.$$

On a :

$$\int_{-\infty}^a f(t)dt = \int_{-\infty}^a 0dt = 0.$$

et :

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \int_a^{+\infty} \frac{3a^3}{t^4}dt = 3a^3 I_4(a) = \frac{3a^3}{3a^3} = 1.$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1.}$$

Donc $\boxed{f \text{ est une densité de probabilité.}}$

- (b) Notons F_X la fonction de répartition de X . On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt.$$

Si $x < a$, alors :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x 0dt = 0.$$

Si $x \geq a$, alors :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^a 0dt + \int_a^x \frac{3a^3}{t^4}dt \\ &= 0 + \left[-\frac{3a^3}{3t^3} \right]_a^x \\ &= 1 - \frac{a^3}{x^3}. \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 - \frac{a^3}{x^3} & \text{si } x \geq a \end{cases} .}$$

- (c) X admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ converge absolument.

Puisque $f(t) = 0$ pour $t < a$, et que pour $t \geq a$, on a $t \geq 0$, cela revient à la convergence usuelle de $\int_a^{+\infty} tf(t)dt$.

Or pour $t \geq a$, on a $tf(t) = t \frac{3a^3}{t^4} = \frac{3a^3}{t^3}$. À un facteur près, c'est donc l'intégrale $I_3(a)$ qui converge.

Ainsi $\boxed{X \text{ admet une espérance}}$ et :

$$\boxed{E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int_a^{+\infty} tf(t)dt = \int_a^{+\infty} \frac{3a^3}{t^3}dt = 3a^3 I_3(a) = \frac{3a^3}{2a^2} = \frac{3}{2}a.}$$

- (d) Vérifions que X admet un moment d'ordre 2. D'après le théorème de transfert, c'est le cas si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt$ converge absolument.

Puisque $f(t) = 0$ pour $t < a$, et que $t^2 \geq 0$, cela revient à la convergence usuelle de $\int_a^{+\infty} t^2 f(t)dt$.

Or pour $t \geq a$, on a $t^2 f(t) = t^2 \frac{3a^3}{t^4} = \frac{3a^3}{t^2}$. À un facteur près, c'est donc l'intégrale $I_2(a)$ qui converge.

Ainsi $\boxed{X \text{ admet un moment d'ordre 2}}$ et :

$$\boxed{E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt = \int_a^{+\infty} t^2 f(t)dt = \int_a^{+\infty} \frac{3a^3}{t^2}dt = 3a^3 I_2(a) = \frac{3a^3}{a} = 3a^2.}$$

D'après la formule de Kœnig-Huygens, X admet donc une variance et :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 3a^2 - \left(\frac{3}{2}a\right)^2 = \frac{3}{4}a^2.$$

3. (a) Si u décrit $]0, 1]$, par stricte décroissance de la fonction $t \mapsto t^{-\frac{1}{3}}$, $u^{-\frac{1}{3}}$ décrit $[1, +\infty[$. Et donc $\frac{a}{u^{\frac{1}{3}}}$ décrit $[a, +\infty[$.

Ainsi $Y(\Omega) = [a, +\infty[$.

- (b) Notons F_Y la fonction de répartition de Y . On a pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P\left(\frac{a}{U^{\frac{1}{3}}} \leq y\right) \\ &= P(a \leq yU^{1/3}) \text{ car } U > 0. \end{aligned}$$

Si $y < a$ alors :

$$F_Y(y) = 0.$$

Si $y \geq a$, on a en particulier $y > 0$ et on a alors :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(a \leq yU^{1/3}) \\ &= P\left(U^{\frac{1}{3}} \geq \frac{a}{y}\right) \\ &= P\left(U \geq \left(\frac{a}{y}\right)^3\right) \text{ car } t \mapsto t^3 \text{ est une bijection strictement croissante} \\ &= 1 - P\left(U < \frac{a^3}{y^3}\right) \\ &= 1 - P\left(U \leq \frac{a^3}{y^3}\right) \\ &\quad \text{car } P(U = \frac{a^3}{y^3}) = 0 \text{ puisque } U \text{ est à densité} \end{aligned}$$

Comme $y \geq a$, on a $0 < \frac{a}{y} \leq 1$. En utilisant alors la loi de U , on trouve :

$$F_Y(y) = 1 - \frac{a^3}{y^3}.$$

Ainsi pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a :

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < a \\ 1 - \frac{a^3}{y^3} & \text{si } y \geq a \end{cases}$$

En particulier, on remarque que $F_Y(y) = F_X(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$ et donc Y et X suivent la même loi.

- (c) Je vous propose deux solutions. La solution attendue ressemblerait plutôt à cela :

```
1 def simulX(a,n):
    U = rd.random(n)
    Y = a/(U**(1/3))
    return Y
```

Cela utilise le fait que les opérations s'appliquent coefficient par coefficient dans les tableaux **numpy**. Mais si on n'est pas tant à l'aise avec **numpy**, on peut écrire :

```

1 def simulX(a,n):
    U = rd.random(n)
    Y = np.zeros(n)
    for i in range(n):
5         Y[i] = a/(U[i]**(1/3))
    return Y

```

4. (a) Comme X est à densité, de densité f , on a :

$$P(X > 2a) = \int_{2a}^{+\infty} f(t)dt = \int_{2a}^{+\infty} \frac{3a^3}{t^4} dt.$$

Pour $A > 2a$, on a :

$$\int_{2a}^A \frac{3a^3}{t^4} dt = \left[-\frac{3a^3}{3t^3} \right]_{2a}^A = \frac{3a^3}{3(2a)^3} - \frac{3a^3}{3(A)^3} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{8}.$$

Donc :

$$P(X > 2a) = \frac{1}{8}.$$

- (b) On a :

$$P_{[X>2a]}(X > 6a) = \frac{P([X > 6a] \cap [X > 2a])}{P(X > 2a)} = \frac{P(X > 6a)}{P(X > 2a)}.$$

Comme dans la question précédente, on calcule pour $A > 6a$:

$$\int_{6a}^A \frac{3a^3}{t^4} dt = \left[-\frac{3a^3}{3t^3} \right]_{6a}^A = \frac{3a^3}{3(6a)^3} - \frac{3a^3}{3(A)^3} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{216}.$$

Donc :

$$P(X > 6a) = \frac{1}{216}.$$

Et ainsi :

$$P_{[X>2a]}(X > 6a) = \frac{\frac{1}{216}}{\frac{1}{8}} = \frac{8}{216} = \frac{1}{27}.$$

- (c)

```

1 a = 10
  N = 1000000
  s1 = 0
  s2 = 0
5 X = simulX(a, N)
  for k in range(N):
      if X[k] > 2*a :
          s1 = s1 + 1
          if X[k] > 6*a:
10             s2 = s2 + 1
  if s1 > 0:
      print(s2/s1)

```

5. (a) Comme les X_k admettent une espérance, par linéarité V_n admet une espérance.

On a :

$$E(V_n) = E\left(\frac{2}{3n} \sum_{k=1}^n X_k\right) = \frac{2}{3n} \sum_{k=1}^n E(X_k) = \frac{2}{3n} \sum_{k=1}^n \frac{3}{2}a = \frac{2}{3n} \times \frac{3}{2}a \times n = a.$$

(b) Comme les X_k admettent une variance, V_n admet une variance. De plus, on a :

$$\begin{aligned}
 V(V_n) &= V\left(\frac{2}{3n} \sum_{k=1}^n X_k\right) \\
 &= \frac{4}{9n^2} V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) \\
 &= \frac{4}{9n^2} \sum_{k=1}^n V(X_k) \\
 &\quad (\text{par indépendance}) \\
 &= \frac{4}{9n^2} \times n \times \frac{3}{4} a^2 \\
 &= \frac{a^2}{3n}.
 \end{aligned}$$

6. (a) W_n est une variable aléatoire. Notons F_{W_n} sa fonction de répartition. On a pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
 F_{W_n}(x) &= P(W_n \leq x) \\
 &= P(\min(X_1, \dots, X_n) \leq x) \\
 &= 1 - P(\min(X_1, \dots, X_n) > x) \\
 &\quad (\text{événement contraire}) \\
 &= 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i > x]\right) \\
 &\quad (\text{car le minimum est supérieur à } x \text{ si et seulement si tous les } X_i \text{ le sont}) \\
 &= 1 - \prod_{i=1}^n P(X_i > x) \\
 &\quad (\text{par indépendance des } X_i) \\
 &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P(X_i \leq x)) \\
 &= 1 - (1 - P(X_1 \leq x))^n \\
 &\quad (\text{car les lois sont identiques})
 \end{aligned}$$

Enfin, en substituant, on a :

$$F_{W_n}(x) = \begin{cases} 1 - (1 - 0)^n & \text{si } x < a \\ 1 - (1 - (1 - \frac{a^3}{x^3}))^n & \text{si } x \geq a \end{cases}.$$

que l'on peut écrire :

$$F_{W_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 - \frac{a^{3n}}{x^{3n}} & \text{si } x \geq a \end{cases}.$$

F_{W_n} est clairement $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en a . De plus :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} 0 = \underbrace{0}_{=F_{W_n}(a)} = \lim_{x \rightarrow a^+} 1 - \frac{a^{3n}}{x^{3n}}.$$

Donc F_{W_n} est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ entier. Et donc W_n est bien une variable à densité.

(b) Pour $x \neq a$, on a :

$$F'_{W_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 3n \frac{a^{3n}}{x^{3n+1}} & \text{si } x > a \end{cases}.$$

Et donc :

$$f_n : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \frac{3na^{3n}}{t^{3n+1}} & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

est bien une densité de W_n .

- (c) W_n admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t) dt$ converge absolument. Comme $f_n(t) = 0$ si $t < a$ et que pour $t \geq a$, on a $t > 0$, cela revient à la convergence usuelle de $\int_a^{+\infty} t f(t) dt$. Or à un facteur près, c'est l'intégrale $I_{3n}(a)$ qui converge. W_n admet une espérance et :

$$E(W_n) = \int_a^{+\infty} t \frac{3na^{3n}}{t^{3n+1}} dt = 3na^{3n} I_{3n}(a) = 3na^{3n} \frac{1}{(3n-1)a^{3n-1}} = \frac{3na}{3n-1}.$$

Soit $\lambda_n \in \mathbb{R}$. On a par linéarité :

$$E(\lambda_n W_n) = \lambda_n \frac{3na}{3n-1}.$$

Ainsi :

$$E(\lambda_n W_n) = a \Leftrightarrow \lambda_n \frac{3na}{3n-1} = a \Leftrightarrow \lambda_n = \frac{3n-1}{3n}.$$

- (d) W_n admet un moment d'ordre 2 si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_n(t) dt$ converge absolument. Comme $f_n(t) = 0$ si $t < a$ et que $t^2 \geq 0$, cela revient à la convergence usuelle de $\int_a^{+\infty} t^2 f(t) dt$. Or à un facteur près, c'est l'intégrale $I_{3n-1}(a)$ qui converge. W_n admet un moment d'ordre 2 et :

$$E(W_n^2) = \int_a^{+\infty} t^2 \frac{3na^{3n}}{t^{3n+1}} dt = 3na^{3n} I_{3n-1}(a) = 3na^{3n} \frac{1}{(3n-2)a^{3n-2}} = \frac{3na^2}{3n-2}.$$

D'après la formule de Koenig-Huygens, W_n admet donc une variance et :

$$V(W_n) = E(W_n^2) - E(W_n)^2 = \frac{3na^2}{3n-2} - \left(\frac{3na}{3n-1} \right)^2.$$

Puis $\lambda_n W_n$ admet une variance et :

$$\begin{aligned} V(\lambda_n W_n) &= \lambda_n^2 V(W_n) = \left(\frac{3n-1}{3n} \right)^2 \left(\frac{3na^2}{3n-2} - \left(\frac{3na}{3n-1} \right)^2 \right) \\ &= \left(\frac{3n-1}{3n} \right)^2 \left(\frac{3n(3n-1)^2 - (3n)^2(3n-2)}{(3n-2)(3n-1)^2} \right) a^2 \\ &= \frac{(3n-1)^2 - 3n(3n-2)}{3n(3n-2)} a^2 \\ &= \frac{9n^2 - 6n + 1 - 9n^2 + 6n}{3n(3n-2)} a^2 \\ &= \frac{a^2}{3n(3n-2)}. \end{aligned}$$

7. (a)

```
1 def simulV(a, m, n):
    V = np.zeros(m)
    for k in range(m) :
        X = simulX(a, n)
5     V[k] = np.sum(X)
    return V
```

(b)

```
1 W = simulW(5, 20, 100)
  V = simulV(5, 20, 100)
  plt.plot(W, '+')
  plt.plot(V, 'x')
5 plt.show()
```

On voit en particulier la très faible dispersion des croix + qui révèle une variance très faible comme celle de W_n devant V_n , ce qui justifie les deux dernières lignes.