
DM 7 - FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

Pour le mardi 21/01/2025

Exercice 1 - ECRICOME ECS 2013 (Exercice 2 - adapté)

On considère :

- la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \frac{1}{5}(x^2(1-x^2) + y^2(1-y^2) + 2xy)$;
- la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par : $\forall n \geq 0, u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1})$ avec $(u_0, u_1) \in [0, 1]^2$.

1. **Étude de f .**

- (a) Si (a, b) est un point critique de f , justifier que $a = b$ puis déterminer tous les points critiques de f ainsi que la valeur de f en chacun de ses points critiques.
- (b) Justifier que f est \mathcal{C}^2 puis calculer la hessienne de f en chacun des points critiques.
- (c) Déterminer les valeurs propres de la hessienne de f en chacun des points critiques.
- (d) Que peut-on conclure quant à la nature locale des points critiques de f ?

On admettra dans toute la suite que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) \leq \frac{2}{5}(x^2 + y^2) - \frac{1}{10}(x^2 + y^2)^2$.

- (e) Préciser le (les) extremum (extrema) de la fonction $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{2t}{5} - \frac{t^2}{10}$.
 - (f) Démontrer que la fonction f possède un maximum global et qu'elle n'est pas minorée.
2. **Programmation de $(u_n)_{n \geq 0}$:** Écrire une fonction **def suite(u0,u1,N)** : en Python prenant en paramètre les valeurs initiales u_0 et u_1 ainsi qu'un entier N et renvoyant la valeur de u_N .
3. **Étude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$:** On considère la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = \frac{2}{5}(a_n + a_{n+1})$ avec $a_0 = u_0$ et $a_1 = u_1$.

- (a) Démontrer que : $\forall n \geq 0, 0 \leq u_n \leq 1$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} \leq \frac{2}{5}(u_n + u_{n+1})$.
- (b) Justifier que : $\forall n \geq 0, u_n \leq a_n$.
- (c) Établir l'existence de quatre réels λ, μ, r, s tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \lambda r^n + \mu s^n$ puis étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.