

CHAPITRE A4 - SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

1 Systèmes différentiels

1.1 Généralités

Définition : Système différentiel linéaire à coefficients constants

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On note $A = (a_{i,j})$. Soit I un intervalle. $x_1, \dots, x_n$ désigne n fonctions dérivables sur I .

On appelle système différentiel linéaire à coefficients constants tout système d'équations de n équations différentielles couplées de la forme :

$$\begin{cases} x_1' &= a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n \\ x_2' &= a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n \end{cases}$$

Résoudre un tel système, c'est trouver une famille de fonctions $x_1, \dots, x_n$ dérivables sur I vérifiant toutes les équations.

Remarque : Dans la plupart des cas, on aura $n = 2$ ou $n = 3$.

Exemples : à faire

Proposition : Écriture matricielle

Avec les notations précédentes, on pose $X : I \rightarrow M_{n,1}(\mathbb{R})$ la fonction définie par :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$\begin{cases} x_1' &= a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n \\ x_2' &= a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n \end{cases} \Leftrightarrow X' = AX.$$

Remarques :

- Ainsi, résoudre le système différentiel revient également à donner une unique fonction X mais à valeurs dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$.
- La fonction X' est la fonction définie par :

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}.$$

Exemples : à faire

Définition : Problème de Cauchy

L'adjonction à un système différentiel linéaire à coefficients constants d'une condition initiale de la forme $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i(t_0) = \alpha_i$ forme un problème de Cauchy.

Remarque : on peut aussi le formule de manière matricielle. Le système $\begin{cases} X' &= AX \\ X(t_0) &= X_0 \end{cases}$ où $X_0 \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ forme un problème de Cauchy.

Proposition

Un problème de Cauchy pour un système différentiel linéaire d'ordre 1 à coefficients constants admet une unique solution.

1.2 Résolutions de cas particuliers

Méthode : Système diagonal

Si A est diagonale de la forme $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ (0) & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ alors le système peut

s'écrire :

$$\begin{cases} x_1'(t) &= \lambda_1 x_1(t) \\ x_2'(t) &= \lambda_2 x_2(t) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= \lambda_n x_n(t) \end{cases}.$$

Dans ce cas, on résout les équations séparément.

Exemples : $\begin{cases} x' = 3x \\ y' = -2y \\ z' = \frac{1}{2}z \end{cases}$ et $\begin{cases} x' = 4x \\ y' = -3y \end{cases}$.

Méthode : Système triangulaire

Si A est triangulaire de la forme $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$ alors le système

peut s'écrire :

$$\begin{cases} x'_1(t) = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ x'_2 = a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n \\ \vdots \\ x'_n = a_{n,n}x_n \end{cases}.$$

Dans ce cas, on commence par résoudre la dernière équation, puis on réinjecte la solution pour résoudre de proche en proche.

Exemples : $\begin{cases} x' = 5x \\ y' = y + x \end{cases}$ et $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = -2y + 2x \end{cases}$.

1.3 Application de la réduction à la résolution

Proposition : Une solution

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Soient $\lambda \in \text{Sp}(A)$ et $V \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé. Alors la fonction $t \mapsto e^{\lambda t}V$ définie sur I est une solution du système différentiel $X' = AX$.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

- Vérifier que 2 est valeur propre de A . Déterminer un vecteur propre associé. En déduire une solution de $X' = AX$.
- Déterminer une seconde valeur propre de A et en déduire une autre solution de $X' = AX$.

Proposition : Résolution générale

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ **diagonalisable**. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A (éventuellement répétées) et $V_1, \dots, V_n$ une base de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres associés.

Alors l'ensemble des solutions de $X' = AX$ est l'ensemble des fonctions de la forme :

$$t \mapsto \alpha_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} V_2 + \cdots + \alpha_n e^{\lambda_n t} V_n$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont des réels.

Remarques :

- L'ensemble des solutions de $X' = AX$ est donc un sous-espace vectoriel de l'espace des applications de $\mathbb{R}$ dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$. En particulier, cet ensemble est stable par combinaison linéaire.
- Ce sous-espace est de dimension n .

Exemples :

- Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -2x(t) + 3y(t) \end{cases}$.

- $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

1.4 Lien avec les équations d'ordre 2

Proposition

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$ et $X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$. Alors :

$$y'' + ay' + by = 0 \Leftrightarrow X' = AX.$$

Exemple : Résoudre de deux manières différentes $y'' + y' - 2y = 0$.

Remarque : cette technique est entièrement analogue à celle vue sur les suites récurrentes d'ordre n .

2 Trajectoires, états d'équilibre

2.1 Trajectoires

Définition : Trajectoire

On appelle trajectoire d'un système différentiel tout ensemble $\{(x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}\}$ où $(x_1, \dots, x_n)$ est une solution du système différentiel.

Remarques :

- Une trajectoire est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. Si $n = 2$, c'est donc une courbe du plan.
- Une trajectoire peut-être réduite à un point si la solution est constante.

Exemples :

- $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = -3y \end{cases}$
- $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = x + 3y \end{cases}$ à faire avec Python.

2.2 États d'équilibre

Définition : Point d'équilibre

On appelle **point d'équilibre** ou **état d'équilibre** toute solution constituée de fonctions constantes.

Remarque : On parle parfois de points critiques ou points stationnaires.

Proposition

Les points d'équilibres du système $X' = AX$ sont données par les solutions de $AX = 0$.

Remarque : les trajectoires des équilibres sont réduites à un point.

Exemple : Déterminer les équilibres de $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 2y \end{cases}$.

2.3 Comportement asymptotique

Définition : Convergence d'une trajectoire

On dit qu'une trajectoire, associée à la solution $(x_1, \dots, x_n)$, convergent si chaque fonction x_i tends vers un $\ell_i \in \mathbb{R}$ quand $t \rightarrow +\infty$.

Dans ce cas, on dit que la trajectoire converge vers $(\ell_1, \dots, \ell_n)$. Dans le cas contraire, on dit que la trajectoire diverge.

Exemple : $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 2y \end{cases}$.

Proposition

Soit A diagonalisable. On considère le système $X' = AX$.

- Si toutes les valeurs propres de A sont négatives ou nulles, alors toutes les trajectoires convergent vers un point d'équilibre. On dit que ce point d'équilibre est stable.
- Sinon, il existe des trajectoires divergentes.

Exemple : analyser le cas $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.