CHAPITRE 14 - CONVERGENCE DE V.A.R.

1 Inégalités de concentration, loi faible des grands nombres

1.1 Inégalités de concentration

Proposition : Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire positive sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ admettant une espérance. Alors :

$$\forall a > 0,\ P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

Démonstration : *à faire* □

Exemple : Loi exponentielle

Proposition : Inégalité de Bienaymé-Tchebytchev

Soit X une variable aléatoire positive sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ admettant une variance. Alors :

$$\forall \epsilon > 0,\ P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{V(X)}{\epsilon^2}.$$

Démonstration : *à faire* □

1.2 Loi faible des grands nombres

Théorème : Loi faible des grands nombres

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes admettant une même espérance μ et une même variance σ^2. On pose $\overline{X_n} = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ alors :

$$\forall \epsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} P(|\overline{X}_n - \mu| \geqslant \epsilon) = 0.$$

Démonstration : *à faire* □

Remarque : Le théorème ne l'exige pas mais on l'applique souvent à une suite de variables de même loi, ce qui garantit qu'elles ont même espérance et même variance (pour peu qu'elles existent).

Corollaire : Théorème de Bernoulli

Soit (X_n) une suite de variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre p. Alors :

$$\forall \epsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} P(|\overline{X}_n - p| \geqslant \epsilon) = 0.$$

Remarque : Ce résultat traduit notre intuition de probabilité. $\overline{X_n}$ est la fréquence de succès dans l'échantillon de n tirages. La probabilité est bien, en un sens, ce vers quoi tend la fréquence d'apparition dans un grand nombre de tirages.

2 Convergence en loi

2.1 Définition et propriétés

Définition : Convergence en loi

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et soit X une variable sur le même espace. On dit que la suite (X_n) converge en loi vers la variable aléatoire X si pour tout réel x où F_X est continue, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x).$$

On note alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Exemple : Convergence en loi de $X_n \hookrightarrow \mathcal{E}(n)$ vers 0.

Remarques :

- La définition est relativement intuitive : la loi est donnée par la fonction de répartition. On dit que ça converge en loi si la fonction de répartition converge vers une autre.
- Attention, on ne regarde la limite qu'au point de continuité de F_X. Cela dit, à part des cas pathologiques, c'est surtout un point technique.

Proposition : (HP)

Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ alors pour tout $a < b$ si a et b sont des points de continuités de F_X alors :

$$P(a < X \leq b) = \lim_{n \to +\infty} P(a < X_n \leq b).$$

Démonstration : *à faire* □

Méthode : Déterminer la limite en loi

1. On commence par déterminer la suite des fonctions de répartition F_{X_n}.
2. On déterminer pour tout x la limite de $F_{X_n}(x)$. On appelle $F(x)$ la limite.
3. Si $F(x)$ existe pour tout x (ou presque), on pose $\tilde{F}(x)$ égale à $F(x)$ en tout point de continuité de F. Mais on s'autorise à changer la valeur de $\tilde{F}$ aux points de discontinuité afin que $\tilde{F}$ soit une fonction de répartition.
4. Vérifier enfin qu'en tout point de continuité de $\tilde{F}$, on a bien la convergence. Dans ce cas, $X_n \hookrightarrow X$ avec X de loi donnée par $\tilde{F}$.

Remarque : La définition par du principe que (la limite) X est une v.a.r. Mais si on regarde une suite de v.a.r. rien ne nous dit qu'une telle variable existe. C'est à ça que servent les vérifications que l'on a données.

Exemples :

- Limite de $\frac{X_n}{n}$ où $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$.
- Loi de Lorenz avec paramètre $f(x) = \frac{\sqrt{n}}{\pi(1+nx^2)}$

2.2 Cas discret à valeurs dans $\mathbb{N}$

Proposition

Soient (X_n) et X des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ si et seulement si :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \ \lim_{n \to +\infty} P(X_n = k) = P(X = k).$$

Attention Maths Appro ! Pour vous, le théorème au programme est avec des variables à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Corollaire : Exemple d'application

Soit (X_n) une suite de v.a.r. telle que $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$ avec $p_n \sim \frac{\lambda}{n}$, $\lambda > 0$. Alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ avec $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Démonstration : *à faire* □

2.3 Théorème limite central

Définition : v.a.r. indépendantes identiquement distribuées

On dit que les variables (X_n) sont indépendantes identiquement distribuées si elles sont indépendantes et suivent toutes la même loi.
On l'abrège souvent en **i.i.d.**

Remarques :

- Soit (X_n) une suite de variables i.i.d. admettant une espérance μ et une variance σ^2. On pose :
$$\overline{X_n} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$
Que vaut alors $E(\overline{X_n})$ et $V(\overline{X_n})$?
- On pose maintenant :
$$\overline{X_n}^\star = \sqrt{n}\left(\frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma}\right)$$
Que vaut alors $E(\overline{X_n}^\star)$ et $V(\overline{X_n}^\star)$?

Théorème : Théorème limite central

Soit (X_n) une suite de variables i.i.d. admettant une espérance μ et une variance σ^2. On note :

$$\overline{X_n} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

Alors la suite de variable aléatoire centrées réduites :

$$\overline{X_n}^\star = \sqrt{n}\left(\frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma}\right)$$

converge en loi vers $\mathcal{N}(0, 1)$.

Remarque : Ce résultat est un affinage de la loi faible des grands nombres. Il caractérise comment on s'écarte de l'espérance.

Corollaire

Dans les conditions précédentes :

$$\lim_{n\to+\infty} P(a \leq \overline{X_n}^\star \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t.$$

Corollaire

Pour $n \gtrsim 30$, $np \gtrsim 15$, $np(1-p) \gtrsim 15$, on peut approximer la loi $\mathcal{B}(n,p)$ par la loi $\mathcal{N}(np, np(1-p))$.

Remarque : Les conditions données ne sont qu'approximatives. Un sujet qui vous demanderait une telle approximation devra préciser lui-même les conditions à exiger et ce sera en revanche à vous de les vérifier.

Exemple : Combien de fois faut-il lancer un dé pour que la fréquence d'apparition du 6 soit $1/6$ à $0,01$ près avec une proba d'au moins 95% ?

- Méthode bienaymé tchebytchev.
- Méthode loi normale. On doit trouver $2\Phi(\frac{0,01\sqrt{36n}}{\sqrt{5}})-1 \geq 0,95$. ça revient à $\frac{0,01\sqrt{36n}}{\sqrt{5}} \geq 1,96$ (table) puis $n \geq 5336$.
- Attention résultat faux. Vrai résultat $n \geq 5395$.

Corollaire

Pour $\lambda \gtrsim 15$, on peut approcher $\mathcal{P}(\lambda)$ par $\mathcal{N}(\lambda, \lambda)$.

3 Mathématiques approfondies

3.1 Convergence en probabilité

Définition : Convergence en probabilité

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et soit X une variable aléatoire sur le même espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On dit que la suite (X_n) converge en probabilité vers la variable aléatoire X si :

$$\forall \epsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} P(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0.$$

On note alors $X_n \xrightarrow{P} X$.

Exemple : Convergence en probabilité de $\max(X_1, \ldots, X_n)$ des lois uniformes vers la loi certaine $X = 1$.

Proposition : Composition par une fonction continue

Soit $X_n \xrightarrow{P} X$ et f continue sur $\mathbb{R}$. Alors :

$$f(X_n) \xrightarrow{P} f(X).$$

Proposition : Convergence et somme

Soit $X_n \xrightarrow{P} X$ et $Y_n \xrightarrow{P} Y$. Alors :

$$X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y.$$

Théorème : Loi faible des grands nombres

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes admettant une même espérance μ et une même variance σ^2. On pose $\overline{X_n} = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ alors $(\overline{X_n})$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à μ c'est-à-dire :

$$\overline{X_n} \xrightarrow{P} \mu.$$

3.2 Convergence en loi

Proposition : (HP)

Soit $X_n \xrightarrow{P} X$ alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Démonstration : *cf TD.* □

Remarques :

- La réciproque est fausse. Illustrons-le. Si X_n est une suite de v.a.r. identitiques de loi $\mathcal{N}(0,1)$ $(X_1 = X_2 = \ldots = X_n = X)$. On a $X_n \xrightarrow{P} X$.

  En revanche, on n'a pas $X_n \xrightarrow{P} -X$.

  Et pourtant la loi de X et de $-X$ est identique et est $\mathcal{N}(0,1)$.

  Dit autrement : la convergence en loi ne contient que l'information de la loi, mais pas ça n'est pas l'ensemble de l'information à savoir sur une variable aléatoire.

- Cela signifie notamment que la convergence en probabilité est une notion plus forte que la convergence en loi.
- Soyons plus précis. Supposons que $X_n \xrightarrow{P} X$. Et supposons que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$ mais sans converger en probabilité.

  Considérons le vecteur aléatoire (X, Y). Les deux lois marginales sont identitiques. Mais on ne peut pas déterminer la loi conjointe. Si on regarde (X, X), on a un cas de corrélation absolue. Mais si X et Y sont indépendantes, on est dans le cas extrême inverse.

  Dit autrement : la convergence en loi ne contient que l'information de la loi et pas l'information des valeurs précises prises par la variable suivant les valeurs prises par les variables de la suite.

Proposition : Convergence en loi et composition

Soit $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et soit f continue sur $\mathbb{R}$. Alors $f(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} f(X)$.

Remarque : Pas de résultat sur les sommes et c'est précisément à cause des remarques précédentes : l'information sur les lois est trop faible pour en déduire des corrélations pourtant indispensable pour déterminer la loi de la somme.