

TD A4 - SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

1 Systèmes différentiels linéaires

Exercice 1

★

Traduire sous forme matricielle les systèmes différentiels ou équation différentielle suivants :

1. (S) $\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) - 6x_2(t) \end{cases}$
2. (E) $x''(t) - 2x'(t) + 3x(t) = 0$
3. (S) $\begin{cases} x'(t) = x(t) - z(t) \\ y'(t) = y(t) - z(t) \\ z'(t) = -x(t) + z(t) \end{cases}$

Exercice 2

★

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que 2 est une valeur propre de A . Donner un vecteur propre associé V . En déduire une solution au système différentiel $X' = AX$.

Exercice 3

★

Résoudre le système différentiel $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 4

★★

Résoudre les systèmes suivants :

1. (S₁) $\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \end{cases}$
2. (S₂) $\begin{cases} x'(t) = x(t) - z(t) \\ y'(t) = y(t) - z(t) \\ z'(t) = -x(t) + z(t) \end{cases}$
3. (S₃) $\begin{cases} x' = 2x - y - z \\ y' = -x + 2y - z \\ z' = -x - y + 2z \end{cases}$

Exercice 5 - Problème de Cauchy

★★

Résoudre les systèmes suivants vérifiant les conditions initiales :

1. $\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \end{cases}$ avec $x_1(0) = 2, x_2(0) = 0$.
2. $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - y(t) \\ y'(t) = -x(t) + 2y(t) \end{cases}$ avec $x_1(0) = 0, x_2(0) = 1$.

Exercice 6

★★

Résoudre en utilisant un système différentiel :

1. $x''(t) - x'(t) - 2x(t) = 0$
2. $y'' + 5y' + 4y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$

Exercice 7 - Non diagonalisable

★★★

On cherche à résoudre (S) $\begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = x + 2y \end{cases}$

1. Traduire sous forme matricielle $X' = AX$, ce système. Montrer que A n'est pas diagonalisable.
2. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et donner P^{-1} .
3. Prouver que $P^{-1}AP$ est une matrice triangulaire que l'on notera T .
4. On pose $Y = P^{-1}X$, avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors en notant $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, montrer que $Y' = P^{-1}X'$.
5. En déduire que $X' = AX \Leftrightarrow Y' = TY$.
6. Résoudre $v' = 3v$ et en déduire la solution de $Y' = TY$ (pour u , on cherchera une solution particulière de la forme $u(t) = ate^{3t}$)
7. Résoudre enfin (S)

Exercice 8 - Ordre 3

★★★

Résoudre l'équation différentielle suivante : (E) $x'''(t) - 6x''(t) + 11x'(t) - 6x(t) = 0$.

2 Trajectoires et points d'équilibre

Exercice 9

★★

Considérons le système $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. Résoudre le système sur $\mathbb{R}$ et donner ses trajectoires.

Exercice 10

★★

Soit le système (S) $\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) \end{cases}$. Résoudre (S) et donner ses trajectoires.

Exercice 11 - Points d'équilibre ★★

On reprend le système $\begin{cases} x'_1(t) = 2x_1(t) - x_2(t) \\ x'_2(t) = -x_1(t) + 2x_2(t) \end{cases}$.
Donner ses points d'équilibre.

Exercice 12 - Asymptotique ★★

On reprend le système (S) $\begin{cases} x'(t) = x(t) - z(t) \\ y'(t) = y(t) - z(t) \\ z'(t) = -x(t) + z(t) \end{cases}$

Existe-t-il des états d'équilibre ?

Étudier le comportement asymptotique des trajectoires.

Exercice 13 - Étude complète ★★

Soit le système (S) $\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = x - y \end{cases}$

1. Résoudre le système (S).
2. Trouver les états d'équilibre associés à (S).
3. Existe-t-il des trajectoires de (S) qui sont convergentes ? Si oui, en donner une.
4. Justifier que toutes les trajectoires ne sont pas convergentes.

Exercice 14 - Étude complète ★★

Soit le système (S) $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -2x - 2y \end{cases}$

1. Montrer que toutes les trajectoires de (S) sont convergentes.
2. Montrer qu'il existe une infinité d'états d'équilibre associés à (S) et les donner.
3. Résoudre le système (S).
4. Trouver une trajectoire qui converge vers l'état d'équilibre (2, -2).

3 Exercices de concours**Exercice 15 - EML Sujet zéro 2023** ★★

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Le but de cette question est de diagonaliser A.
 - (a) Justifier que la matrice est de rang 1.
 - (b) En déduire une valeur propre de A ainsi qu'une base du sous-espace propre associé.

(c) Justifier que 6 est valeur propre de A et qu'un vecteur propre associé est $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(d) Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D de $M_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.

2. Résoudre le système différentiel :

$$(SH) \begin{cases} x' = x + 2y - z \\ y' = 2x + 4y - 2z \\ z' = -x - 2y + z \end{cases}$$

3. Soient $X_1 : t \mapsto X_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix}$ et $X_2 : t \mapsto$

$$X_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} \text{ deux solutions du système (SH).}$$

On suppose qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $X_1(t_0) = X_2(t_0)$. Que pouvez-vous dire de X_1 et X_2 ?

4. (a) Déterminer la solution X du système (SH)

$$\text{vérifiant } X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Déterminer la solution X du système (SH)

$$\text{vérifiant } X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5. Dans cette question on considère trois fonctions continues $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On s'intéresse au système différentiel :

$$(S) \begin{cases} x' = x + 2y - z + a(t) \\ y' = 2x + 4y - 2z + b(t) \\ z' = -x - 2y + z + c(t) \end{cases}$$

où x , y et z sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, inconnues, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de la variable réelle t .

Une solution de (S) sur $\mathbb{R}$ est une application $X :$

$$t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

- (a) Préciser quel vecteur colonne $B(t) \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ dépendant de la variable réelle t permet d'écrire le système (S) sous la forme : $X' = AX + B(t)$.
- (b) Soit Y une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de (S). Démontrer que X est solution de (S) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $Z : t \mapsto X(t) - Y(t)$ est solution de (SH) sur $\mathbb{R}$.
- (c) On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$, $a(t) = 1$, $b(t) = 2(1 - e^t)$, $c(t) = e^t - 1$. Démontrer alors que $Y : t \mapsto \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est solution de (S) sur $\mathbb{R}$. En déduire les solutions de (S) sur $\mathbb{R}$.