

CHAPITRE A5 - GRAPHS PROBABILISTES ET CHAÎNES DE MARKOV

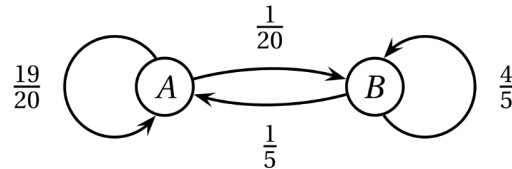
1 Graphes probabilistes

1.1 Généralités

Définition : Graphe probabiliste

Un graphe probabiliste est un graphe orienté et pondéré dans lequel les sommets représentent les états d'un système. Les poids sur les arêtes représentent des probabilités de passage d'un état à l'autre.

Exemple : Deux villes voisines A et B totalisent à elles deux une population constante. La ville A est plus accessible en transports depuis le reste du pays, mais la ville B offre de meilleurs loyers. 20% des habitants de B partent chaque année habiter A par commodité, et 5% des habitants de A partent chaque année habiter B pour augmenter leur niveau de vie.



Propriétés :

- Entre chaque pair de sommets d'un graphe probabiliste, il y a au plus une arête dans une orientation donnée.
- L'absence d'arête représente la même chose qu'une arête avec le poids 0.
- La somme des poids des arêtes sortantes d'un sommet fait toujours 1.

1.2 Matrice de transition

Définition : Matrice de transition

Pour tout graphe probabiliste à n sommets, on appelle matrice de transition du graphe la matrice $M = (p_{i,j})$ de $M_n(\mathbb{R})$ tel que le coefficient $p_{i,j}$ soit égale au poids de l'arête reliant le sommet i au sommet j .

Si une telle arête n'existe pas, on pose $p_{i,j} = 0$.

Exemple : établir la matrice de transition du graphe précédent.

Propriétés :

- Les coefficients d'une matrice de transition sont tous positifs (ils sont tous dans $[0, 1]$).
- La somme des coefficients d'une ligne fait toujours 1. On dit que la matrice est **stochastique**.
- En conséquence, 1 est valeur propre de toute matrice de transition.

2 Chaînes de Markov

2.1 Généralités

Définition : Chaîne de Markov

On appelle chaîne de Markov toute suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé et à valeurs dans un espace E qui vérifie pour toute collection $(i_0, i_1, \dots, i_n, i_{n+1}) \in E^{n+2}$ telle que $P([X_0 = i_0] \cap [X_1 = i_1] \cap \dots \cap [X_n = i_n]) \neq 0$:

$$P_{[X_0=i_0] \cap [X_1=i_1] \cap \dots \cap [X_n=i_n]}(X_{n+1} = i_{n+1}) = P_{[X_n=i_{n+1}]}(X_{n+1} = i_{n+1})$$

Remarques :

- Les variables X_i représentent l'état d'un système à différents instants i .
- L'ensemble E des valeurs possibles pour la chaîne est appelé l'ensemble des états. En pratique, on a tendance à prendre $E = \llbracket 1, r \rrbracket$.
- La condition signifie que la probabilité de passer à l'état i_{n+1} à l'instant suivant ne dépend que de l'état présent (donné par X_n) et de l'instant (le valeur de n).
- On dit que la chaîne est dans l'état i au temps n si l'événement $[X_n = i]$ est réalisé.
- On note souvent les probabilités $P_{[X_n=j]}(X_{n+1} = i)$ de la manière suivante : $p_{i,j}(n)$. On appelle ces quantités **probabilités de transition**.
- On dit que la chaîne de Markov est homogène si les coefficients $p_{i,j}$ ne dépendent pas de n .

Définition : Graphe associé

On appelle graphe associé à une chaîne de Markov **homogène**, le graphe probabiliste dont les sommets sont les états possibles de la chaîne et les arrêtes portent pour poids les probabilités $p_{i,j}$ de transition associées.

Exemple : Quels sont les états possibles et les probabilités de transition de la chaîne de Markov associée au graphe vu dans les exemples précédents ?

Remarque : Attention, il ne faut pas confondre avec la matrice d'adjacence.

2.2 États probabilistes, matrice de transition**Définition : États probabilistes**

Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans $\llbracket 1, r \rrbracket$, pour tout $i \in \mathbb{N}$ on appelle $i^{\text{ème}}$ **état probabiliste** de la chaîne la matrice ligne V_i définie par :

$$V_i = (P(X_i = 1) \quad P(X_i = 2) \quad \cdots \quad P(X_i = r)) \in M_{1,r}(\mathbb{R}).$$

Remarque : V_0 est appelé l'état initial de la chaîne de Markov.

Exemple : avec la situation précédente, on suppose qu'à l'année 0, un quart des habitants sont en A. On considère un habitant choisi au hasard. X_0 représente la ville dans laquelle il vit la première année. Quel est l'état initial ?

Définition : Matrice de transition

Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov **homogène** à r états notés 1 à r , on appelle matrice de transition associée la matrice $M \in M_r(\mathbb{R})$ dont le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ colonne est la probabilité de transition $p_{i,j}$.

Proposition

La matrice de transition d'une chaîne de Markov homogène est identique à la matrice de transition du graphe associé.

Proposition

Soit (X_n) une chaîne de Markov homogène à r états notés 1, ..., r . On note $M = (p_{i,j})$ sa matrice de transition. On a :

$$\forall j \in \llbracket 1, r \rrbracket, P(X_{n+1} = j) = \sum_{i=1}^r P(X_n = i) p_{i,j}.$$

Si on note V_n le $n^{\text{ème}}$ état probabiliste, cela se traduit matriciellement par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = V_n M.$$

Remarques :

- La première formule se montre à partir de la formule des probabilités totales.
- Il n'est pas surprenant qu'il y ait une écriture matricielle : la première formule est *linéaire* et les matrices sont justement définies pour représenter des relations linéaires.
- Puisque la relation est linéaire, l'application $\mu : V \mapsto VM$ est un endomorphisme. Sa matrice dans la base canonique est tM .

Exemple : Quel est l'état au temps 1 avec l'état initial choisi précédemment ?

Proposition

Soit (X_n) une chaîne de Markov homogène à r états notés 1, ..., r . On note $M = (p_{i,j})$ sa matrice de transition. Si on note V_n le $n^{\text{ème}}$ état probabiliste, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$V_n = V_0 M^n.$$

Remarque : À savoir redémontrer par récurrence.

Exemple pour tout mettre en œuvre : On considère un mobile, initialement en O , et qui se déplace par sauts sur les points O, A, B selon la règle suivante :

- S'il est en O à l'instant n , il sera de façon équiprobable, soit en A , soit en B à l'instant $n + 1$.
- S'il est en A à l'instant n , il retourne de façon équiprobable soit O , soit il reste en A à l'instant $n + 1$.
- S'il est en B à l'instant n , il passe en O à l'instant $n + 1$ avec la probabilité 1.

On dit que le mobile est dans l'état 1 s'il se trouve en A , dans l'état 2 s'il se trouve en O et dans l'état 3 s'il se trouve en B . On notera, pour tout entier naturel n , X_n l'état dans lequel se trouve le mobile à l'instant n .

On admet que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov homogène.

1. Représenter le graphe probabiliste.
2. Déterminer la matrice de transition M .
3. Déterminer l'état initial et le 2^{ème} état probabiliste.
4. Déterminer le $n^{\text{ème}}$ état probabiliste.

2.3 États stables

Définition : État stable d'une chaîne de Markov homogène

Soit (X_n) une chaîne de Markov homogène de matrice de transition $M \in M_r(\mathbb{R})$. Une loi de probabilité définie par une matrice ligne π qui vérifie $\pi = \pi M$ est appelée **loi stationnaire** ou **état stable** de la chaîne de Markov.

Remarques :

- Puisque π définit une loi de probabilité, la somme de ses coefficients vaut 1.
- Si X_0 a pour loi un état stable π , alors tous les X_n ont pour loi le même état stable π . Dit autrement si l'état initial est stable, alors tous les états probabilistes suivants sont ce même état stable.
- Si (X_n) admet un état stable, alors ${}^t\pi$ est vecteur propre de tM pour la valeur propre 1.
- 1 est toujours valeur propre de tM . En revanche, il n'est pas garanti qu'un vecteur propre associé ait tous ses coefficients positifs.

Proposition

Soit (X_n) une chaîne de Markov homogène. La loi limite de (X_n) , si elle existe, est un état stable de la chaîne.

Remarque : on appelle loi limite la loi donnée par les limites de $P(X_n = j)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exemple : étude du cas d'un système à 2 états 1 et 2 avec probabilités de transition a de passer de 1 à 2 et b de passer de 2 à 1.

1. Quelles sont les probabilités de transition de 1 à 1 et de 2 à 2 ?
2. Tracer le graphe probabiliste.
3. Déterminer la matrice de transition.
4. Que dire sur les états stables si $a = b = 0$?
5. Que dire sur les états stables si $a = 0$ ou $b = 0$ mais pas les deux ?
6. Que dire sur les états stables si $a = b = 1$?
7. Déterminer l'ensemble des états stables dans les cas restants.

3 Annexe : astuce de diagonalisation

Proposition

Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}^*$.

- $\lambda \in \text{Sp}(A)$ si et seulement si $k\lambda \in \text{Sp}(A)$.
- $V \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ est vecteur propre de A pour la valeur propre λ si et seulement si V est vecteur propre de kA pour la valeur propre $k\lambda$.

Remarque : à savoir démontrer.

Méthode : Diagonaliser une matrice avec des coefficients fractionnaires

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ avec des coefficients fractionnaires.

- Mettre tous les coefficients au même dénominateur.
- Factoriser le dénominateur commun en écrivant $A = \frac{1}{q}B$.
- Diagonaliser B .
- Le spectre de A se trouve en multipliant celui de B par $\frac{1}{q}$. Les vecteurs propres associés sont les mêmes que ceux de B (sans transformation nécessaire).

Exemple : diagonaliser $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.