Chapitre B3 - Endomorphismes symétriques

Dans tout le chapitre E désigne un espace euclidien de dimension n et on note le produit scalaire sur $\langle\cdot|\cdot\rangle$ et $\|\cdot\|$ la norme associée.

1 Endomorphismes et matrices symétriques

Définition : Endomorphisme symétrique

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est un endomorphisme symétrique si :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle f(x)|y\rangle = \langle x|f(y)\rangle.$$

Exemples :

- Les homothéties sont symétriques.
- Soit F un sev de E. La symétrie parallèlement à $F^\perp$ par rapport à F est symétrique.

Propriétés :

- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. f est symétrique si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est symétrique.
- Soit f un endomorphisme symétrique et soit F un sev de E stable par f. Alors $F^\perp$ est stable par f.
- Soit f un endomorphisme symétrique et soient $\lambda, \mu \in \mathrm{Sp}(f)$ avec $\lambda \neq \mu$. Alors $E_\lambda(f)$ et $E_\mu(f)$ sont orthogonaux.
- Soit f un endomorphisme symétrique et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathrm{Sp}(f)$ distinctes et soient x_1 à x_p des vecteurs propres associées à $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ respectivement.
  Alors la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est orthogonale.

Remarque : Si f n'est pas symétrique, alors $(x_1, \dots, x_p)$ est libre. Ici on précise donc *pourquoi* (ou comment) les vecteurs sont linéairement indépendants : ils sont indépendants car dans des directions orthogonales.

2 Projecteurs orthogonaux

2.1 Projection orthogonale, projeté orthogonal

Définition : Projecteur orthogonal

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On appelle projecteur orthogonal sur F le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$.
On note ce projecteur p_F. On dit que $p_F(x)$ est le projeté orthogonal de x sur F.

Remarque : Puisqu'il n'y a qu'un seul supplémentaire orthogonal, à partir du moment où on dit que le projecteur est orthogonal, il n'y a pas besoin de préciser la direction de projection. Ça n'est valable **que** pour les projecteurs orthogonaux.

Exemples :

- Projection sur l'axe des abscisses parallèlement à l'axe des ordonnées dans $\mathbb{R}^2$
- Projection sur $S_n(\mathbb{R})$ parallèlement à $A_n(\mathbb{R})$ avec le produit scalaire canonique sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Méthode :

Déterminer le projeté orthogonal.

1. Déterminer une base $(e_1, \dots, e_p)$ de F (pas forcément orthogonale)
2. Écrire $p_F(x) \in F$: c'est une combinaison linéaire $\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i$ des e_i.
3. Écrire $x - p_F(x) \in F^\perp$: $\langle x - p_F(x)|e_i\rangle = 0$ pour tout i.
4. Résoudre le système.

Exemples :

- Projeté de $(2,2,2)$ sur $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y/2 + z = 0\}$.
- Projeté de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ sur $S_n(\mathbb{R})$ avec $\langle M|N\rangle = \mathrm{Tr}({}^tMN)$.
- Projeté de $X^2 + X - 1$ sur $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ P' = 0\}$ avec $\langle P|Q\rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.

2.2 Formules en bases orthonormées

Proposition

Soit $(u_1, \dots, u_k)$ une base orthonormée de F. Alors pour tout $x \in E$, on a :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{k} \langle u_i | x \rangle u_i.$$

Exemple : Le projecteur sur X dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni de $\langle P|Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.

Proposition

Soit p un projecteur. p est un endomorphisme symétrique si et seulement si c'est un projecteur orthogonal.

2.3 Caractérisation par la norme

Proposition

Soit F un sous-espace vectoriel. Soient $x, y \in E$. On a :

$$y = p_F(x) \Leftrightarrow \|x - y\| = \min_{u \in F} \|x - u\|.$$

Exemples :

- Calculer $\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} (x-1)^2 + (x-2y+2)^2 + y^2$.
- La meilleur approximation de degré 2 à X^3 avec $\int_{-1}^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$?

Corollaire : Théorème des pseudo-solutions

Soit $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p et soit $B \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors il existe un unique $X_0 \in \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ minimisant $\{\|AX - B\|, X \in \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{R})\}$.

Remarques :

- Comme A est de rang p, on a $n \geq p$.
- Il n'y a pas forcément de solution. On trouve ici qu'il y a une unique quasi-solution : X_0 est le plus proche possible d'une solution.
- Cela nous servira pour la regression linéaire en statistique bivariée.

3 Réduction des endomorphismes et matrices symétriques

3.1 Diagonalisation des endormophismes symétriques

Proposition

Soit f un endomorphisme symétrique de E. f est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.

Corollaire

Soit f un endomorphisme symétrique de E. Alors il existe une base orthonormée B de E composée de vecteurs propres de f.

Exemple : Cas d'un projecteur orthogonal.

3.2 Diagonalisation des matrices symétriques

Proposition

Soit A une matrice symétrique.
A est diagonalisable et il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que :

$$A = P^{-1}DP = {}^tPDP.$$

Méthode : Diagonalisation d'une matrice symétrique

1. Déterminer les valeurs propres.
2. Déterminer une base orthogonale de chaque espace propre.
3. Orthogonaliser chaque base.
4. Écrire la concaténation des bases pour obtenir ${}^tP$. Puis la transposer pour obtenir P.

Exemples : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.