# Correction DM 7 - Fonctions de deux variables

## Exercice 1 - ECRICOME ECS 2013 (Exercice 2 - adapté)

1. **Étude de $f$.**

(a) $f$ est $\mathcal{C}^1$ car c'est une fonction polynomiale des coordonnées. On peut donc calculer pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ :

$$\partial_1 f(x,y) = \frac{1}{5}(2x(1-x^2) + x^2 \times (-2x) + 2y) = \frac{2}{5}(x+y-2x^3).$$

Et :

$$\partial_2 f(x,y) = \frac{1}{5}(2y(1-y^2) + y^2 \times (-2y) + 2x) = \frac{2}{5}(x+y-2y^3).$$

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} (a,b) \text{ critique} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \partial_1 f(a,b) = 0 \\ \partial_2 f(a,b) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a+b-2a^3 = 0 \\ a+b-2b^3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Supposons que $(a,b)$ est un point critique. Montrons que $a=b$. On a alors :

$$(a+b+2a^3) - (a+b+2b^3) = 0.$$

Donc :

$$2a^3 - 2b^3 = 0.$$

Puis :

$$a^3 = b^3.$$

Et donc :

$$\boxed{a = b}$$

car $x \mapsto x^3$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
Abandonnons l'hypothèse $(a,b)$ critique. On a donc :

$$\begin{aligned} (a,b) \text{ critique} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a+b-2a^3 = 0 \\ a+b-2b^3 = 0 \\ a = b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2a-2a^3 = 0 \\ a = b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a(1-a)(1+a) = 0 \\ a = b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad (a,b) = (0,0) \text{ ou } (a,b) = (1,1) \text{ ou } (a,b) = (-1,-1). \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des points critiques est $\boxed{\{(0,0),(1,1),(-1,-1)\}}$.
De plus :

$$\boxed{f(0,0) = 0, \quad f(1,1) = \frac{2}{5} \quad \text{et} \quad f(-1,-1) = \frac{2}{5}.}$$

(b) $f$ est $\mathcal{C}^2$ comme fonctions polynomiales. De plus, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \partial^2_{1,1} f(x,y) &= \frac{2}{5}(1-6x^2) \\ \partial^2_{2,1} f(x,y) &= \frac{2}{5} \\ \partial^2_{1,2} f(x,y) &= \frac{2}{5} \text{ (que l'on peut trouver avec le théorème de Schwarz)} \\ \partial^2_{2,2} f(x,y) &= \frac{2}{5}(1-6y^2). \end{aligned}$$

On a donc en particulier :

$$\boxed{\nabla^2 f(0,0) = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(1,1) = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla^2 f(1,1) = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}.}$$

(c) Comme les matrices sont d'ordre 2, on peut déterminer leur spectre en utilisant le déterminant. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\lambda \in \mathrm{Sp}(\nabla^2 f(0,0)) &\Leftrightarrow \nabla^2 f(0,0) - \lambda I_2 \text{ est non-inversible} \\
&\Leftrightarrow \det(\nabla^2 f(0,0) - \lambda I_2) = 0 \\
&\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} \frac{2}{5} - \lambda & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} - \lambda \end{pmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{2}{5} - \lambda\right)^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda^2 - \frac{4}{5}\lambda = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda\left(\lambda - \frac{4}{5}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda \in \left\{0, \frac{4}{5}\right\}.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(\nabla^2 f(0,0)) = \left\{0, \frac{4}{5}\right\}.}$$

On trouve de même :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(\nabla^2 f(1,1)) = \mathrm{Sp}(\nabla^2 f(1,1)) = \left\{-\frac{8}{5}, -\frac{12}{5}\right\}.}$$

(d) Comme $0 \in \mathrm{Sp}(\nabla^2 f(0,0))$, on ne peut pas conclure sur cette base uniquement quant à la nature du point critique en $(0,0)$.

En revanche, comme $\mathrm{Sp}(\nabla^2 f(1,1)) \subset \mathbb{R}_-^\star$, on peut en déduire que le point critique en $(1,1)$ est un maximum local.

De même, le point critique en $(-1,-1)$ est un maximum local.

(e) La fonction $g$ est une fonction polynomiale du second degré. Elle admet donc un unique extremum en son sommet. C'est un maximum car son terme de plus haut degré est négatif. On a pour tout $t \in \mathbb{R}$ :

$$\frac{2t}{5} - \frac{t^2}{10} = \frac{1}{10}t(4-t).$$

Donc les racines de $g$ sont 0 et 4. Donc le sommet est en 2.

Ainsi $g$ atteint un maximum en 2 qui vaut $\boxed{g(2) = \frac{4}{5} - \frac{4}{10} = \frac{2}{5}}$.

(f) On sait que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$f(x,y) \leq \frac{2}{5}(x^2+y^2) - \frac{1}{10}(x^2+y^2)^2.$$

Or $\frac{2}{5}(x^2+y^2) - \frac{1}{10}(x^2+y^2)^2 = g(x^2+y^2)$. De plus $g$ est majoré par son maximum $\frac{2}{5}$. Donc :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) \leq g(x^2+y^2) \leq \frac{2}{5}.$$

Donc $f$ est majorée par $\frac{2}{5}$ qu'elle atteint en $(-1,-1)$ et $(1,1)$, c'est donc un maximum global de $f$.
De plus si $f$ était minorée par $m \in \mathbb{R}$, alors on aurait :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ m \leq f(x,y) \leq g(x^2+y^2).$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, posons $x = y = \sqrt{\frac{t}{2}}$. On a pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ :

$$g(x^2 + y^2) = g(t).$$

Or $\lim_{t \to +\infty} g(t) = -\infty$. Donc $g$ n'est pas minorée sur $R_+$. Et donc $f$ n'est pas minorée.

2. **Programmation de** $(u_n)_{n \geq 0}$ **:**

```python
import numpy as np

def f(x,y):
    return 1/5*(x*x*(1-x*x) + y*y*(1-y*y) + 2*x*y)

def suite(u0,u1,N):
    if N == 0:
        return u0
    elif N == 1:
        return u1

    u = np.zeros(N+1)
    u[0] = u0
    u[1] = u1
    for i in range(2,N+1):
        u[i] = f(u[i-2],u[i-1])
    return u[N]
```

3. **Étude de la suite** $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **:**

(a) **Lemme :** Soient $x \in [0,1]$ et $y \in [0,1]$. Montrons que $f(x,y) \in [0,1]$.

On a $0 \leq x^2 \leq 1$ puis $0 \leq 1 - x^2 \leq 1$ et donc : $0 \leq x^2(1-x^2) \leq 1$. De même $0 \leq y^2(1-y^2) \leq 1$. On a aussi $0 \leq 2xy \leq 2$.

Ainsi $0 \leq \frac{1}{5}(x^2(1-x^2) + y^2(1-y^2) + 2xy) \leq \frac{4}{5}$. Et donc :

$$\boxed{f(x,y) \in \left[0, \frac{4}{5}\right] \subset [0,1]}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons :

$$H_n \quad : \quad \text{« } u_n \text{ est dans } [0,1] \text{ ».}$$

Montrons que $H_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence double.

- **Cas** $n = 0$ **:** Pour $n = 0$, cela revient à dire que $u_0 \in [0,1]$, ce qui est une hypothèse de l'énoncé.
- **Cas** $n = 1$ **:** De même, $u_1 \in [0,1]$ par hypothèse.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $H_n$ et $H_{n+1}$ sont vraies, c'est-à-dire que $u_n$ et $u_{n+1}$ sont dans $[0,1]$. Montrons que $H_{n+2}$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+2}$ est dans $[0,1]$.
  On a : $u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1})$. Or $u_n, u_{n+1} \in [0,1]$ par hypothèse de récurrence et donc d'après le lemme $f(u_n, u_{n+1}) \in [0,1]$. Donc on a bien $u_{n+2} \in [0,1]$.

Ainsi on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n \in [0,1]}$.

Soit désormais $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1}) \leq \frac{2}{5}(u_n^2 + u_{n+1}^2) - \frac{1}{10}(u_n^2 + u_{n+1}^2)^2$$

d'après l'inégalité admise précédemment. Donc :

$$u_{n+2} \leq \frac{2}{5}(u_n^2 + u_{n+1}^2)$$

puisque $-\frac{1}{10}(u_n^2 + u_{n+1}^2)^2 \leq 0$. Puis comme $u_n \in [0,1]$ et $u_{n+1} \in [0,1]$, leurs carrés sont plus petits qu'eux. Donc :

$$\boxed{u_{n+2} \leq \frac{2}{5}(u_n + u_{n+1}).}$$

(b) Procédons par récurrence double. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$H_n \ : \ \text{« } u_n \leq a_n \text{ »}.$$

- **Cas $n = 0$ :** On a $u_0 = a_0$ par définition de $(a_n)$ donc $H_0$ est vraie.
- **Cas $n = 1$ :** On a $u_1 = a_1$ par définition de $(a_n)$ donc $H_1$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $H_n$ et $H_{n+1}$. Montrons $H_{n+2}$.
  On a :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &\leq \frac{2}{5}(u_n + u_{n+1}) \\ &\leq \frac{2}{5}(a_n + a_{n+1}) \\ &\leq a_{n+2}. \end{aligned}$$

  Donc $H_{n+2}$ est vraie.

Donc par principe de récurrence double, on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n \leq a_n}$.

(c) $(a_n)$ est une suite récurrente double d'équation caractéristique :

$$x^2 - \frac{2}{5}x - \frac{2}{5} = 0.$$

Le discriminant de cette équation de degré 2 est :

$$\Delta = \left(-\frac{2}{5}\right)^2 - 4 \times 1 \times \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{44}{25} > 0.$$

Il y a donc deux racines que l'on notera $r$ et $s$ avec :

$$r = \frac{\frac{2}{5} + \sqrt{\frac{44}{25}}}{2} = \frac{1 + \sqrt{11}}{5} \quad \text{et} \quad s = \frac{\frac{2}{5} - \sqrt{\frac{44}{25}}}{2} = \frac{1 - \sqrt{11}}{5}.$$

Il existe donc deux réels $\lambda, \mu$ tels que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \lambda r^n + \mu s^n.}$$

On a $3 \leq \sqrt{11} \leq 4$. Donc $r \in [0, 1[$ et $s \in ]-1, 0]$. Ainsi :

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$$

comme somme de suites géométriques de raisons entre $-1$ et $1$ (exclus).
Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leq u_n \leq a_n.$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0.}$$