DM8 Appliquées - Convergences de v.a.r.

À rendre le mardi 04/02/2025

Rendre une copie pour deux, en mentionnant bien les deux noms.

Exercice 1 - EML ECE 2016 (Exercice 3)

Partie I - Étude d'une variable aléatoire

On considère une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout t dans $\mathbb{R}$, par :

$$f(t) = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2}.$$

1. Vérifier que la fonction f est paire.
2. Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire réelle.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire réelle X à densité, de densité f.

3. Déterminer la fonction de répartition de X.
4. (a) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t f(t)\mathrm{d}t$ converge.
   (b) En utilisant l'imparité de la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto t f(t)$, montrer que X admet une espérance et que l'on a $E(X) = 0$.

Partie II - Étude d'une autre variable aléatoire

On considère une application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout x dans $\mathbb{R}$, par :

$$\varphi(x) = \ln(1+\mathrm{e}^{x}).$$

5. Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à déterminer.
6. Exprimer, pour tout $y \in I$, $\varphi^{-1}(y)$.

On définit la variable aléatoire réelle Y par : $Y = \varphi(X)$.

7. Justifier que $P(Y \leqslant 0) = 0$.
8. Déterminer la fonction de répartition de Y.
9. Reconnaître alors la loi de Y et donner, sans calcul, son espérance et sa variance.

Partie III - Étude d'une convergence en loi

On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ mutuellement indépendantes, de même densité f, où f a été définie dans la partie I.

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^\star$: $T_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $U_n = T_n - \ln(n)$.

10. (a) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}^\star$, la fonction de répartition de T_n.
    (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(U_n \leqslant x) = \left(1 + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^{-n}$.
11. En déduire que la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle à densité dont on précisera la fonction de répartition et une densité.