DM8 Approfondies - Convergences de v.a.r.

À rendre le mardi 04/02/2025

Rendre une copie pour deux, en mentionnant bien les deux noms.

Exercice 1 - EDHEC ECS 2021 (Exercice 2)

1. On considère une variable aléatoire Z suivant la loi normale centrée réduite. On pose $Y = e^Z$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité. On note F_Y la fonction de répartition de Y et Φ celle de Z.
   (a) Déterminer $F_Y(x)$ pour tout réel x négatif ou nul, puis exprimer $F_Y(x)$ à l'aide de la fonction Φ pour tout réel x strictement positif.
   (b) En déduire qu'une densité f_Y de Y est donnée par :
$$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x)^2}{2}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

Dans la suite, on considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, toutes définies sur le même espace probabilisé, mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi, dite loi de Rademacher de paramètre p (avec $0 < p < 1$), et définie par :
$$P(X_n = 1) = p \text{ et } P(X_n = -1) = 1 - p.$$
On considère de plus, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, la variable aléatoire $T_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$.

2. (a) Donner l'espérance et la variance communes aux variables X_n.
   (b) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par T_n puis calculer $E(T_n)$ et en déduire une relation entre $P(T_n = 1)$ et $P(T_n = -1)$.
   (c) Écrire une autre relation vérifiée par $P(T_n = 1)$ et $P(T_n = -1)$, puis en déduire la loi de T_n.
   (d) Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge en loi vers une variable T dont on précisera la loi.

   Indication : *Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et si f est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ alors $f(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} f(X)$.*
   On pourra ainsi se ramener à des lois discrètes sur $\mathbb{N}$.

3. Soit T' une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que les variables X_n.
   (a) Établir l'inclusion suivante :
$$\left[|T_{n+1} - T'| < \frac{1}{2}\right] \cap \left[|T_n - T'| < \frac{1}{2}\right] \subset \left[|T_{n+1} - T_n| < 1\right].$$
   (b) En déduire l'inégalité :
$$P\left(|T_{n+1} - T_n| \geq 1\right) \leq P\left(|T_{n+1} - T'| \geq \frac{1}{2}\right) + P\left(|T_n - T'| \geq \frac{1}{2}\right).$$
   (c) Montrer, en observant les valeurs que peut prendre la variable $T_{n+1} - T_n$, que :
$$P\left(|T_{n+1} - T_n| \geq 1\right) = 1 - p.$$
   (d) La suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge-t-elle en probabilité ?

   Indication : *$X_n \xrightarrow{P} X$ ((X_n) converge en probabilité vers X) si et seulement si*
   $\forall \epsilon > 0,\ P(|X_n - X| \geqslant \epsilon) = 0$.

4. Dans cette question, on prend $p = \frac{1}{2}$.
   On considère, pour tout n de $\mathbb{N}^\star$, les variables aléatoires, $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $U_n = e^{n\overline{X}_n}$.
   (a) On rappelle que $\overline{X}_n^\star$ est la variable aléatoire centrée réduite associée à $\overline{X}_n$. Exprimer $\overline{X}_n^\star$ en fonction de $\overline{X}_n$.
   (b) Utiliser le théorème limite central pour établir que la suite $(U_n^{1/\sqrt{n}})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge en loi vers une variable aléatoire de même loi que Y.