TD B3 - Endomorphismes symétriques

1 Supplémentaires orthogonaux

Exercice 1 ⋆

On considère $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique. Déterminer une base de $F^\perp$ dans les cas suivants :

1. $F = \text{Vect}((1,1,0,-2),(0,1,3,2))$;
2. $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+y-z+t = 0 \text{ et } x-y-t = 0\}$.

Exercice 2 ⋆⋆

Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires d'un espace euclidien E. Montrer que $E = F^\perp \oplus G^\perp$.

2 Projecteurs orthogonaux

Exercice 3 ⋆⋆

Soit E un espace euclidien de base orthonormée $(e_1,\dots,e_n)$, soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension 1 et soit p le projecteur orthogonal sur F. Montrer que $\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 = 1$.

Exercice 4 ⋆⋆

Soit E un espace euclidien et soit p un projecteur orthogonal de E. Montrer que pour tout $x \in E$, on a $\langle p(x), x\rangle = \|p(x)\|^2$.

Exercice 5 - Matrice d'un projecteur ⋆⋆

Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique on considère le sous-espace vectoriel F défini par :

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y-z = 0\}.$$

On note alors p le projecteur orthogonal sur F. Le but de l'exercice est de déterminer la matrice de p dans la base canonique $\mathcal{B}$.

1. Déterminer une base de F. En déduire une base orthonormée de F. En déduire une expression de p.
2. Utiliser cette expression pour déterminer la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$.

Exercice 6 - Projetés orthogonaux ⋆⋆

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire :

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$$

1. Déterminer le projeté orthogonal de X^2+X+1 sur $F = \mathbb{R}_1[X]$.
2. Déterminer le projeté orthogonal de X^3+X^2+X+1 sur $F = \text{Vect}(X^3+X, X^2, 1)$.
3. Déterminer le projeté orthogonal de X^2-1 sur $F = \text{Vect}(1+X, X^2-X)$.

Exercice 7 ⋆⋆

Pour $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$ et $Q = b_0 + b_1X + b_2X^2$ dans $\mathbb{R}_2[X]$, on pose :

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{i=0}^{2} a_i b_i.$$

Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$. En déterminer une base.
2. Montrer que $\langle \cdot, \dot{}\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer la distance entre le polynôme X^2 et F.

Exercice 8 ⋆⋆⋆

Soit $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$. On pose pour tous $P, Q \in E$, $\langle P, Q\rangle = \sum_{k=-n}^{n} P(k)Q(k)$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Montrer que si P est pair et que si Q est impair alors P et Q sont orthogonaux.
3. Déterminer, en fonction de n, les valeurs de a et b qui rendent minimale l'expression $\|X^2 - aX + b\|^2$.

Exercice 9 ⋆⋆⋆

Soit E un espace euclidien et soit f un endomorphisme de E tel que $\forall x \in E,\ \langle f(x), x\rangle$.

1. Montrer que $\forall (x,y) \in E^2,\ \langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle$.
2. Montrer que $\ker(f) = (\text{Im}(f))^\perp$.
3. Montrer que si $\lambda \in \text{Sp}(f)$ alors $\lambda = 0$. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 10 ⋆⋆⋆

Sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}({}^tAB)$. Soit p l'application définie sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ par $p(M) = \frac{M+{}^tM}{2}$.

1. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que p est un projecteur de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer son image et son noyau.
3. Montrer que p est le projecteur orthogonal sur $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices symétriques de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Soit $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par $m_{i,j} = 1$ si $i = 1$ et $m_{i,j} = 0$ sinon.
Calculer $\min_{A\in \mathrm{A}_n(\mathbb{R})} \|A - M\|$. Même question si M est la matrice dont tous les coefficients valent 1.

Exercice 11 ⋆⋆⋆

Le but de cet exercice est de prouver l'existence et de calculer la valeur de :

$$\Delta = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (\mathrm{e}^t - at - b)^2 \mathrm{d}t.$$

Sur $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire :

$$\forall (f,g) \in E^2,\ \langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

Soient f_1, f_2 et g les élements de E définies par $\forall t \in [0,1],\ f_1(t) = 1,\ f_2(t) = t$ et $g(t) = \mathrm{e}^t$. On pose alors $F = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$. Soit $Q = af_2 + bf_1 \in F$.

1. Donner sous forme intégrale $\|g - Q\|^2$.
2. En déduire qu'il existe un unique $Q_0 \in F$ minimisant $\|g - Q_0\|^2$.
3. Déterminer sans calcul les valeurs de $\langle g - Q_0, f_1\rangle$ et $\langle g - Q_0, f_2\rangle$.
4. En déduire la valeur de Δ.

Exercice 12 ⋆⋆⋆⋆

Pour $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on pose :

$$\langle A, B\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}b_{i,j}.$$

1. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit :

$$F = \left\{ M = (m_{i,j}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j} = 0 \right\}.$$

2. Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et que si J_n désigne la matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ remplie de 1 alors $F^\perp = \mathrm{Vect}(J_n)$.
3. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer la valeur de $\delta = \min_{M\in F} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (m_{i,j} - a_{i,j})^2$.

3 Endomorphismes symétriques

Exercice 13 ⋆

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Déterminer le rang de $A + I_3$. En déduire que -1 est valeur propre de A et déterminer $\dim E_{-1}(A)$. Déterminer les autres valeurs propres de A.
3. Déterminer une base des des sous-espaces propres de A.
4. Déterminer une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telle que $A = {}^tPDP$.

Exercice 14 ⋆

Pour chacune des matrices suivantes, déterminer D diagonale et P orthogonale telles que $A = {}^tPDP$.

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$;
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;
3. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;
4. $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 15 ⋆⋆

1. Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices symétriques. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que AB soit symétrique.
2. Soient f et g deux endomorphismes symétriques d'un espace euclidien E. Déduire de la question précédente une condition nécessaire et suffisante pour que $f \circ g$ soit un endomorphisme symétrique.

Exercice 16 ⋆⋆

Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E tel que $\forall x \in E,\ \langle x, f(x)\rangle = 0$. Montrer que f est l'endomorphisme nul.

Exercice 17 ⋆⋆

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétirque dont toutes les valeurs propres sont positives. Montrer qu'il existe une matrice $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique à valeurs propres positives telle que $B^2 = A$.

Exercice 18 ⋆⋆⋆

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ et soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de A. Montrer que :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2 \dim E_{\lambda_i}(A).$$

Exercice 19 ⋆⋆⋆

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $B = {}^tAA$.

1. Montrer que B est symétrique, et que toutes ses valeurs propres sont positives.
2. Prouver que pour $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$BX = 0 \Leftrightarrow AX = 0.$$

   En déduire que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$.

Exercice 20 - D'après EML 2013 ⋆⋆⋆

Soit $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec $\|X\| = 1$ et soit $S = X{}^tX$. On munit $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle M, N\rangle = \mathrm{Tr}({}^tMN)$.

1. Montrer que S est symétrique et vérifie $S^2 = S$.
2. Soit $\Phi : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\Phi(M) = SM$. Vérifier que Φ est un endomorphisme symétrique de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer $\Phi^2 = \Phi$. En déduire le spectre de Φ.
4. Montrer que $\ker(\Phi)$ et $\ker(\Phi - \mathrm{Id}_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})})$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 21 - Tchebychev EML 2005 ⋆⋆⋆

Soit $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$f(P) = (X^2 - 1)P'' + 3XP'.$$

1. Montrer que $(P|Q) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et qu'il est symétrique pour $(\cdot|\cdot)$.

   Indication : montrer que $(f(P)|Q) = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}P'(t)Q'(t)\mathrm{d}t$.

   (b) Déterminer les valeurs propres de f.

Exercice 22 - Racine carrée ⋆⋆⋆

Soit E un espace euclidien. Un endomorphisme symétrique $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit défini positif si pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $\langle f(x), x\rangle > 0$.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ symétrique tel que $g^2 = f$. Montrer que f est symétrique et que : $\forall x \in E, \langle f(x), x\rangle \geq 0$.
2. Montrer qu'un endomorphisme symétrique est défini positif si et seulement si $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^\star$.
3. En déduire que si f est symétrique défini positif, alors f est inversible et f^{-1} est encore symétrique défini positif.
4. Soit f un endomorphisme symétrique défini positif de E. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ symétrique, défini positif, tel que $g^2 = f$.

   Indication : on pourra considérer la matrice de f dans une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de f.

Exercice 23 ⋆⋆⋆

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^\star$ tel que $A^j = I_n$. Montrer que $A^2 = I_n$.

Exercice 24 - Quotients de Rayleigh ⋆⋆⋆

Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme symétrique de E. Soit λ la plus petite valeur propre de f et μ la plus grande valeur propre.

1. Montrer que pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, on a :

$$\lambda \leq \frac{\langle f(x), x\rangle}{\|x\|^2} \leq \mu$$

2. En déduire que :

$$\lambda = \min_{x\neq 0} \frac{\langle f(x), x\rangle}{\|x\|^2} \quad \text{et} \quad \mu = \max_{x\neq 0} \frac{\langle f(x), x\rangle}{\|x\|^2}.$$

4 Exercices de concours

Exercice 25 - QSP ESCP 2014 ⋆⋆⋆⋆

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$ et soit (a, b) une famille orthonormée de E. Soit f l'application définie sur E par $f(x) = \langle x, a\rangle b - \langle x, b\rangle a$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = (\ker(f))^\perp$.
2. L'application f est-elle diagonalisable ?

Exercice 26 - QSP ESCP 2015 ⋆⋆⋆⋆

Soit A une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tAA = A^tA$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$. Montrer que $A = 0$.

Exercice 27 - QSP HEC 2009 ⋆⋆⋆⋆⋆

Soient f et g deux endomorphismes symétriques d'un espace euclidien E, dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles.

1. Montrer qu'il existe un endomorphisme symétrique ϕ tel que $f = \phi^2$.
2. Montrer que $\ker(f+g) = \ker(f) \cap \ker(g)$.

Exercice 28 - Oral ESCP 2016 ⋆⋆⋆⋆⋆

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien muni de la norme $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant :

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\| \leq \|x\|.$$

1. (a) Soit x un vecteur appartenant à $\ker(u - \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$. Justifier qu'il existe $y \in E$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ nx = u^n(y) - y$.
   (b) En déduire que $E = \ker(u - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$.
2. On pose $\forall p \in \mathbb{N},\ v_p = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p} u^k$ et on note w le projecteur sur $\ker(u - \mathrm{Id})$ parallèlement à $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$. Montrer que pour tout $x \in E$, la suite $(v_p(x))_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers $w(x)$ c'est-à-dire que :

$$\forall x \in E,\ \lim_{p \to +\infty} \|v_p(x) - w(x)\| = 0.$$

3. Soit Q un projecteur de E, distinct de l'application nulle.
   (a) Montrer que si $\ker(Q)$ et $\mathrm{Im}(Q)$ sont orthogonaux alors $\forall x \in E,\ \|Q(x)\| \leq \|x\|$.
   (b) Réciproquement, on suppose que $\forall x \in E,\ \|Q(x)\| \leq \|x\|$. Soit $X \in \mathrm{Im}(Q)$ et $y \in \ker(Q)$. En considérant les vecteurs $z = x + \lambda y$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que $\langle x, y \rangle = 0$.
   (c) En déduire que le projecteur Q non nul est orthogonal si et seulement si $\forall x \in E,\ \|Q(x)\| \leq \|x\|$.
4. En déduire que w est un projecteur orthogonal.

Exercice 29 - Oral ESCP 2013 ⋆⋆⋆⋆⋆

Soit $n \geq 2$. On note $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les valeurs propres sont réelles et positives.

1. (a) Soit $S \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $S \in \mathrm{S}_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXSX \geq 0$.
   (b) Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $S = {}^tAA \in \mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$.
   (c) Réciproquement, montrer que pour toute matrice $S \in \mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$, il existe $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tAA$.
2. Soient U et V deux matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que si 0 est valeur propre de UV alors 0 est aussi valeur propre de VU.
   (b) Montrer que les matrices UV et VU ont les mêmes valeurs propres.
3. (a) Soient S et T deux matrices de $\mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $S + T \in \mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$.
   (b) $\mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$?
4. Soient S et T deux matrices de $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$.
   (a) À quelle condition nécessaire et suffisante sur S et T a-t-on ST symétrique ?
   (b) On suppose que S et T appartiennent à $\mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$. En utilisant les questions 1c et 2b, montrer que toutes les valeurs propres de la matrice ST sont positives.