TD A5 - Graphes probabilistes et chaînes de Markov

Exercice 1 ⋆⋆

On considère trois points A, B et C . Un pion est placé en A au début de la partie (qui correspond à l'instant $t = 0$) et il se déplace suivant les règles suivantes :

- Si le pion est en A à l'instant t, à l'instant $t+1$, il se trouve en A , B ou C avec une probabilité de $\frac{1}{3}$.
- Si le pion est en B à l'instant t, à l'instant $t+1$, il se trouve en B ou en C avec une probabilité $\frac{1}{2}$.
- Si le pion est en C, il ne bouge plus.

On note $P(X_n = A)$ (resp. $P(X_n = B)$ et $P(X_n = C)$) la probabilité que le point soit en A (resp. en B ou C) à l'instant n.

1. Représenter le graphe probabiliste correspondant à cette situation et expliciter sa matrice de transition M.

On note V_n la matrice ligne formée par les probabilités suivantes : $V_n = \big(P(X_n = A) \quad P(X_n = B) \quad P(X_n = C)\big)$

2. Donner l'état initial V_0, le premier et le 2$^{\text{ième}}$ état probabiliste V_1 et V_2. Quelle est la signification concrète de ce deuxième état probabiliste ?
3. Donner les états stables possibles de cette situation (que l'on peut deviner intuitivement, puis par le calcul).
4. Etude asymptotique :
   (a) Diagonaliser M dans le but d'en calculer la puissance n.
   (b) Montrer que le $(n+1)^e$ état probabiliste V_{n+1} s'expriment en fonction du n^e état probabiliste V_n grâce à la relation $V_{n+1} = V_n M$.
   (c) Montrer que le n^e état probabiliste vérifie $V_n = V_0 M^n$.
   (d) Expliciter le n^e état probabiliste.
   (e) Les résultats obtenus sont-ils cohérents avec les résultats trouvés en questions 2 et 3 ?

Exercice 2 ⋆⋆

Un théâtre propose deux types d'abonnements pour une année : un abonnement A donnant droit à six spectacles ou un abonnement B donnant droit à trois spectacles. On considère un groupe de 2 500 personnes qui s'abonnent tous les ans. n étant un entier naturel, on note :

- a_n la probabilité qu'une personne ait choisi un abonnement A l'année n ;
- b_n la probabilité qu'une personne ait choisi un abonnement B l'année n ;
- P_n la matrice $(a_n \quad b_n)$ traduisant l'état probabiliste à l'année n.

Tous les ans 85% des personnes qui ont choisi l'abonnement A et 55% des personnes qui ont choisi l'abonnement B conservent ce type d'abonnement l'année suivante. Les autres personnes changent d'abonnement.

1. On suppose que, l'année zéro, 1500 personnes ont choisi l'abonnement A et 1000 l'abonnement B. En déduire l'état initial $P_0 = (a_0 \quad b_0)$.
2. (a) Tracer un graphe probabiliste traduisant les données de l'énoncé.
   (b) Déterminer la matrice de transition M de ce graphe.
   (c) Déterminer le nombre d'abonnés pour chaque type d'abonnement l'année n.
3. Prouver qu'il existe un unique état stable, et le déterminer.
   Interpréter le résultat précédent en terme de nombre d'abonnement de type A et de type B.

Exercice 3 ⋆⋆

Étude de l'évolution météorologique d'un jour à l'autre dans une localité.

- S'il fait sec aujourd'hui, alors il fera encore sec demain avec la probabilité $\frac{5}{6}$, donc il fera humide demain avec la probabilité $\frac{1}{6}$;
- S'il fait humide aujourd'hui, alors il fera encore humide demain avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

Nous sommes dimanche et il fait sec. On s'intéresse à l'évolution météorologique des jours suivants. Soit n un entier naturel, on note :

- s_n la probabilité pour que le jour n, il fasse sec ;
- h_n la probabilité pour que le jours n, il fasse humide ;
- T_n la matrice $(s_n \quad h_n)$ traduisant l'état probabiliste du temps le jours n.

1. Déterminer une relation entre s_n et h_n.
2. (a) Si le premier dimanche est le jour correspondant à $n = 0$, donner la matrice associée à l'état initial du temps.
   (b) Décrire l'évolution de cet état à l'aide d'une graphe probabiliste.

3. (a) Donner la matrice de transition M associée à ce graphe.
   (b) Déterminer M^2.
   (c) Quelle sera la situation météorologique le mardi suivant ?
4. (a) Déterminer l'état stable associé à l'évolution météorologique.
   (b) En déduire, à long terme, la probabilité qu'il pleuve un certain jour.

Exercice 4 ⋆⋆

Chaque année, une association de cyclotourisme prépare de nouveaux circuits. Pour satisfaire ses nombreux membres elle élabore des circuits de différents niveaux : « niveau facile », « niveau moyen » et « niveau difficile ». Au premier janvier 2023, l'association a fait son bilan :

- 20% de ses adhérents ont choisi le niveau facile, noté A ;
- 70% de ses adhérents ont choisi le niveau moyen, noté B ;
- 10% de ses adhérents ont choisi le niveau difficile, noté C.

Pour répondre aux attentes des adhérents et les fidéliser sur le long terme, une enquête est effectuée. Il s'avère que, d'une année à l'autre :

- parmi les adhérents ayant choisi le niveau A, 40% restent à ce niveau et 60% passent au niveau B,
- parmi les adhérents ayant choisi le niveau B, 70% restent à ce niveau et 20% reviennent au niveau A et les autres passent passent au niveau C,
- parmi les adhérents ayant choisi le niveau C, 85% restent à ce niveau et les autres reviennent au niveau B.

On note :

- A l'état « l'adhérent a choisi le niveau A »,
- B l'état « l'adhérent a choisi le niveau B »,
- C l'état « l'adhérent a choisi le niveau C »,

Pour n entier naturel positif ou nul, on note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste de la répartition dans les différents niveaux (indiqués dans l'ordre donné dans l'énoncé), au premier janvier de l'année $2023+n$. On se décide de se baser uniquement sur ces résultats pour prévoir l'évolution de la répartition à partir du premier janvier 2023 (on néglige donc les nouveaux abonnés et les départs).

1. Donner P_0.
2. Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets A, B et C.
3. Donner la matrice M de transition associée à ce graphe, en respectant l'ordre alphabétique des sommets.
4. Une seule des trois matrices Q, R, T ci-dessous correspond à l'état probabiliste stable.
   $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ $R = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$
   Le président affirme que 50% des adhérents choisiront après un certain nombre d'années le niveau B. Cette affirmation est-elle correcte ?

Exercice 5 ⋆⋆

Une urne A contient deux jetons numérotés 0 et une urne B contient deux jetons numérotés 1.
On tire un jeton dans chaque urne et on les échange (le jeton provenant de A est placé dans B, celui prélevé dans B est remis dans A). On procède ainsi à n échanges ($n \in \mathbb{N}$).
On note X_n la somme aléatoire des numéros des jetons alors contenus dans A. Ainsi X_0 est la variable aléatoire constamment nulle.
Pour n entier naturel, on pose : $p_n = P(X_n = 0)$, $q_n = P(X_n = 1)$ et $r_n = P(X_n = 2)$.

1. Pour tout entier naturel n, exprimer p_{n+1}, q_{n+1} et r_{n+1} en fonction de p_n, q_n et r_n.
2. Pour tout entier naturel n, exprimer q_{n+2} en fonction de q_{n+1} et q_n. En déduire qu'il existe deux réels λ et μ (que l'on déterminera) tels que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $q_n = \lambda + \mu\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.
3. Pour n entier naturel, déterminer la loi de X_n et calculer $E(X_n)$.
4. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n)$.

Exercice 6 ⋆⋆

Une entreprise reçoit le jour 0 deux machines identiques fonctionnant de manière indépendante. Le fournisseur garantit à l'entreprise que l'une au moins des machines est en état de marche mais elles peuvent tomber en panne au cours d'une journée avec la probabilité $q = \frac{1}{4}$. On suppose que si une machine est en panne (soit à la livraison, soit au cours d'une journée), elle est réparée pendant la nuit suivante mais on en peut réparer qu'une seule machine par nuit. On note X_n le nombre de machines en fonction le jour n. On définit ainsi une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Préciser le nombre d'états de cette chaîne et représenter le graphe probabiliste associé.
2. Définir la matrice de transition M.
3. Déterminer quelle doit être la probabilité que les deux machines livrées soient en état de marche afin que les variables X_n suivent toutes la même loi.