Correction DM8 Appliquées - Convergences de v.a.r.

Exercice 1 - EML ECE 2016 (Exercice 3)

Partie I - Étude d'une variable aléatoire

1. Pour $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(-t) &= \frac{\mathrm{e}^{-(-t)}}{(1+\mathrm{e}^{-(-t)})^2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{t}}{(1+\mathrm{e}^{t})^2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{t}}{\mathrm{e}^{2t}(\mathrm{e}^{-t}+1)^2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(\mathrm{e}^{-t}+1)^2} \\ &= \boxed{f(t).} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{f \text{ est bien paire.}}$

2. Vérifions que f est une densité :
   - $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$
   - $\boxed{f \text{ est positive}}$ comme rapport de fonctions positives.
   - Pour $A, B \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \int_A^B f(t)\mathrm{d}t &= \int_A^B \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2}\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-t}}\right]_A^B \\ &= \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-B}} - \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-A}}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\int_0^B f(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[B\to+\infty]{} 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

et :

$$\int_A^0 f(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[A\to-\infty]{} \frac{1}{2}.$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.}$$

Donc $\boxed{f \text{ est bien une densité.}}$

3. Notons F_X la fonction de répartition de X. Comme f est une densité de X, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$

D'après les calculs précédents, cela fait :

$$\boxed{F_X(x) = \lim_{A\to-\infty}\int_A^x f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}.}$$

4. (a) On a :

$$tf(t) = t \times \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} t\mathrm{e}^{-t}.$$

Comme tous les termes sont positifs, par critère d'équivalence, les intégrales :

$$\int_0^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

ont même nature. Or $\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}$ est la formule de l'espérance pour la loi $\mathcal{E}(1)$. Donc c'est une intégrale convergente.

D'où $\boxed{\int_0^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t}$ converge.

(b) X admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$ converge absolument. $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$ converge absolument si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} |tf(t)|\mathrm{d}t$ converge.

Comme f est paire, $t \mapsto tf(t)$ est effectivement impaire et donc la fonction $t \mapsto |tf(t)|$ est paire. Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} |tf(t)|\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\int_0^{+\infty} |tf(t)|\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$ converge. C'est le cas d'après la question précédente.

Donc X admet une espérance. De plus, comme $t \mapsto tf(t)$ est effectivement impaire, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t = 0.$$

Donc $\boxed{E(X) = 0.}$

Partie II - Étude d'une autre variable aléatoire

5. φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ par opérations sur les fonctions usuelles et pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} > 0.$$

Donc φ est strictement croissante.

Comme φ est strictement monotone et $\mathcal{C}^0$, le théorème de la bijection s'applique.

On a :

$$\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty.$$

Donc $\boxed{\varphi \text{ est une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur } I =]0,+\infty[.}$

6. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in I$. On a :

$$\begin{aligned} x = \varphi^{-1}(y) &\Leftrightarrow \varphi(x) = y \\ &\Leftrightarrow \ln(1+\mathrm{e}^x) = y \\ &\Leftrightarrow 1+\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^y \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^y - 1 \\ &\Leftrightarrow x = \ln(\mathrm{e}^y - 1). \end{aligned}$$

Donc $\varphi^{-1}(y) = \ln(\mathrm{e}^y - 1)$.

7. Comme φ est à valeurs dans $]0,+\infty[$ et que $Y = \varphi(X)$, on a $Y(\Omega) \subset]0,+\infty[$. En particulier,

$$\boxed{P(Y \leqslant 0) = 0.}$$

8. Notons F_Y la fonction de répartition de Y. On a pour tout $y \leqslant 0$:

$$F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = 0$$

pour la même raison que dans la question précédente.

Puis pour $y > 0$:

$$\begin{array}{rcl} F_Y(y) & = & P(Y \leqslant y) \\ & = & P(\varphi(X) \leqslant y) \\ & = & P(X \leqslant \varphi^{-1}(y)) \\ & & \text{car } \varphi^{-1} \text{ est une bijection croissante de } \mathbb{R}_+^\star \text{ sur } \mathbb{R} \\ & = & F_X(\varphi^{-1}(y)) \\ & = & \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-\varphi^{-1}(y)}} \\ & = & \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-\ln(\mathrm{e}^y-1)}} \\ & = & \dfrac{1}{1+\frac{1}{\mathrm{e}^y-1}} \\ & = & \dfrac{\mathrm{e}^y-1}{\mathrm{e}^y-1+1} \\ & = & 1-\mathrm{e}^{-y}. \end{array}$$

Donc pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leqslant 0 \\ 1-\mathrm{e}^{-y} & \text{si } y > 0 \end{cases}.}$$

9. On reconnaît la loi $\boxed{\mathcal{E}(1).}$ Donc :

$$\boxed{E(Y) = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{et} \quad V(Y) = \frac{1}{1^2} = 1.}$$

Partie III - Étude d'une convergence en loi

10. (a) Notons F_{T_n} la fonction de répartition de T_n. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{array}{rcl} F_{T_n}(x) & = & P(T_n \leqslant x) \\ & = & P(\max(X_1,\dots,X_n) \leqslant x) \\ & = & P\left(\displaystyle\bigcap_{k=1}^n [X_k \leqslant x]\right) \\ & & \text{(car le maximum est inférieur à } x \text{ si et seulement si tous les termes sont inférieurs à } x) \\ & = & \displaystyle\prod_{k=1}^n P(X_k \leqslant x) \\ & & \text{(car les variables sont mutuellement indépendantes)} \\ & = & P(X_1 \leqslant x)^n \\ & & \text{(car les variables suivent la même loi)} \\ & = & \left(\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right)^n \\ & = & \boxed{\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)^{-n}.} \end{array}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} P(U_n \leqslant x) & = & P(T_n - \ln(n) \leqslant x) \\ & = & P(T_n \leqslant x + \ln(n)) \\ & = & F_{T_n}(x+\ln(n)) \\ & = & \left(1+\mathrm{e}^{-(x+\ln(n))}\right)^{-n} \\ & = & \boxed{\left(1+\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^{-n}.} \end{array}$$

11. Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, on a :

$$\left(1+\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^{-n} = \exp\left(-n\ln\left(1+\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)\right)$$

De plus :

$$-n\ln\left(1+\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n\times\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\mathrm{e}^{-x}$$

puisque $\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Ainsi : $-n\ln\left(1+\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\mathrm{e}^{-x}$. Et donc par composition avec exp continue :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^{-n} = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}.$$

Posons $F : x \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$. $\boxed{F \text{ est bien une fonction de répartition à densité.}}$ En effet :

- F est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ par opérations sur les fonctions usuelles.
- F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ par opérations sur les fonctions usuelles.
- F est croissante sur $\mathbb{R}$. En effet pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$F'(x) = \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}} > 0.$$

- $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$.
- $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

Notons U une variable dont la fonction de répartition est donnée par F. Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$F_{U_n}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F(x)$$

on a bien $\boxed{U_n \xrightarrow{\mathcal{L}} U.}$

De plus comme on a déjà calculé la dérivée de F, on a une densité de U donnée pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$\boxed{f_U(x) = \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}.}$$