CORRECTION DM8 APPROFONDIES - CONVERGENCE DES V.A.R.

Exercice 1 - EDHEC ECS 2021 (Exercice 2)

1. (a) Soit $x \leq 0$. Comme $Y(\Omega) \subset \mathbb{R}_+^\star$, on a :

$$\boxed{F_Y(x) = P(Y \leq x) = 0.}$$

Soit maintenant $x > 0$. On a :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leq x) \\ &= P(\mathrm{e}^Z \leq x) \\ &= P(Z \leq \ln(x)) \\ &\quad \text{(car ln est strictement croissante)} \\ &= \boxed{\Phi(\ln(x)).} \end{aligned}$$

(b) Y est à densité d'après l'énoncé. On peut donc calculer la dérivée de F_Y pour $x \in \mathbb{R}$ sauf éventuellement un nombre fini de points. On a pour $x < 0$:

$$\boxed{F_Y'(x) = 0}$$

et pour $x > 0$:

$$\boxed{F_Y'(x) = \frac{1}{x}\Phi'(\ln(x)) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x)^2}{2}\right).}$$

La valeur en 0 de la densité est arbitraire tant qu'elle est positive. Ainsi :

$$\boxed{f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x)^2}{2}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}}$$

définit bien une densité de Y.

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $X_n(\Omega) = \{-1, 1\}$ qui est fini. Ainsi X_n admet bien une espérance et une variance et on a :

$$\boxed{E(X_n) = 1 \times P(X_n = 1) + (-1) \times P(X_n = -1) = p - (1-p) = 2p - 1}$$

et :

$$E(X_n^2) = 1^2 \times P(X_n = 1) + (-1)^2 \times P(X_n = -1) = p + (1-p) = 1.$$

Donc d'après la formule de Huygens :

$$\boxed{V(X_n) = 1 - (2p-1)^2 = 4p - 4p^2 = 4p(1-p).}$$

(b) On a $T_n = \prod_{k=1}^n X_k$. Or les valeurs prises par X_k sont 1 et -1. Donc les produits de X_k sont à valeurs dans $\{-1, 1\}$. D'où :

$$T_n(\Omega) \subset \{-1, 1\}.$$

On a même $T_n = 1$ si par exemple $X_1 = \cdots = X_n = 1$ (ce qui a une probabilité p^n par indépendance) et $T_n = -1$ si par exemple $X_1 = -1$ et $X_2 = \cdots = X_n = 1$ (ce qui a une probabilité $(1-p)p^{n-1}$ par indépendance). Donc :

$$\boxed{T_n(\Omega) = \{-1, 1\}.}$$

De plus, on a :

$$\boxed{E(T_n) = E\left(\prod_{k=1}^n X_k\right) = \prod_{k=1}^n E(X_k) = (2p-1)^n}$$

où l'on a sorti le produit par indépendance des X_k.
Or :

$$E(T_n) = 1 \times P(T_n = 1) + (-1) \times P(T_n = -1).$$

On en déduit que :

$$\boxed{P(T_n = 1) - P(T_n = -1) = (2p-1)^n.}$$

(c) On sait de plus que :

$$P(T_n = 1) + P(T_n = -1) = 1.$$

En sommant les deux relations précédentes on obtient :

$$\boxed{P(T_n = 1) = \frac{1 + (2p-1)^n}{2}}$$

et en faisant la différence :

$$\boxed{P(T_n = -1) = \frac{1 - (2p-1)^n}{2}}$$

ce qui donne entièrement la loi de T_n puisque $T_n(\Omega) = \{-1, 1\}$.

(d) Techniquement T_n, bien que discrète, n'est pas à valeurs dans $\mathbb{N}$. On peut s'y ramener cependant en regardant $U_n = T_n + 1$.
U_n est bien discrète à valeur dans $\mathbb{N}$. De plus :

$$\lim_{n\to+\infty} P(U_n = 0) = \lim_{n\to+\infty} P(T_n = -1) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-(2p-1)^n}{2} = \frac{1}{2}$$

et :

$$\lim_{n\to+\infty} P(U_n = 2) = \lim_{n\to+\infty} P(T_n = 1) = \frac{1}{2}.$$

Donc $U_n \xrightarrow{\mathcal{L}} U$ où U suit la loi donnée par :

$$P(U = 0) = P(U = 2) = \frac{1}{2}.$$

$U - 1$ suit donc une loi de Rademacher de paramètre $\frac{1}{2}$.
On a $T_n = f(U_n)$ et on pose $T = f(U)$ où $f : x \mapsto x - 1$. Comme f est continue, on a : $f(U_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} f(U)$ c'est-à-dire :

$$\boxed{T_n \xrightarrow{\mathcal{L}} T}$$

où $T = U - 1$ suit une loi de Rademacher de paramètre $\frac{1}{2}$.

3. (a) On a :

$$\begin{aligned} |T_{n+1} - T_n| &= |T_{n+1} - T' + T' - T_n| \\ &\leq |T_{n+1} - T'| + |T' - T_n| \\ &\leq |T_{n+1} - T'| + |T_n - T'|. \end{aligned}$$

Ainsi, si $|T_{n+1} - T'| < \frac{1}{2}$ et $|T_{n+1} - T'| < \frac{1}{2}$, on a bien $|T_{n+1} - T_n| < 1$. Dit autrement, on a :

$$\boxed{\left[|T_{n+1} - T'| < \frac{1}{2}\right] \cap \left[|T_n - T'| < \frac{1}{2}\right] \subset [|T_{n+1} - T_n| < 1].}$$

(b) Avec l'inégalité précédente, on a :

$$P\left(\left[|T_{n+1} - T'| < \frac{1}{2}\right] \cap \left[|T_n - T'| < \frac{1}{2}\right]\right) \leq P\left(|T_{n+1} - T_n| < 1\right).$$

Calculons désormais :

$$\begin{aligned} P(|T_{n+1}-T_n| \geq 1) &= P\left(\overline{[|T_{n+1}-T_n| \geq 1]}\right) \\ &= 1 - P(|T_{n+1}-T_n| < 1) \\ &\leq 1 - P\left(\left[|T_{n+1}-T'| < \frac{1}{2}\right] \cap \left[|T_n - T'| < \frac{1}{2}\right]\right) \\ &\leq P\left(\overline{\left[|T_{n+1}-T'| < \frac{1}{2}\right] \cap \left[|T_n - T'| < \frac{1}{2}\right]}\right) \\ &\leq P\left(\left[|T_{n+1}-T'| \geq \frac{1}{2}\right] \cup \left[|T_n - T'| \geq \frac{1}{2}\right]\right) \\ &\leq \boxed{P\left(|T_{n+1}-T'| \geq \frac{1}{2}\right) + P\left(|T_n - T'| \geq \frac{1}{2}\right).} \end{aligned}$$

(c) On a :

$$T_{n+1} = X_{n+1} \times T_n.$$

Ainsi si $X_{n+1} = 1$, on a $\boxed{T_{n+1} - T_n = 0}$. Et si $X_{n+1} = -1$ alors $\boxed{|T_{n+1} - T_n| = 2|T_n| = 2}$. Donc :

$$\boxed{P(|T_{n+1}-T_n| \geq 1) = P(X_{n+1} = -1) = 1 - p.}$$

(d) Faisons un raisonnement par l'absurde et supposons que $T_n \xrightarrow{P} T'$ pour une certaine variable T'. On a donc pour tout $\epsilon > 0$:

$$P(|T_n - T'| \geq \epsilon) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Posons $\epsilon = \frac{1}{2}$. On a donc $P\left(|T_n - T'| \geq \frac{1}{2}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. En particulier, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$:

$$P\left(|T_n - T'| \geq \frac{1}{2}\right) \leq \frac{1-p}{4}.$$

On a donc :

$$\boxed{P\left(|T_n - T'| \geq \frac{1}{2}\right) + P\left(|T_{n+1} - T'| \geq \frac{1}{2}\right) \leq \frac{1-p}{2}.}$$

Or on déduit des questions précédentes l'inégalité suivante :

$$\boxed{P\left(|T_{n+1} - T'| \geq \frac{1}{2}\right) + P\left(|T_n - T'| \geq \frac{1}{2}\right) \geq 1-p.}$$

Donc :

$$\boxed{1 - p \leq \frac{1-p}{2}}$$

ce qui est équivalent à $\boxed{p \geq 1}$ ce qui est absurde puisque $p < 1$. Ainsi (T_n) ne converge pas en probabilité.

4. (a) On a :

$$\boxed{\overline{X}_n^{\star} = \frac{\overline{X}_n - E(\overline{X}_n)}{\sqrt{V(\overline{X}_n)}}.}$$

Nettoyons un peu cette expression. On a :

$$E(\overline{X}_n) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{n(2p-1)}{n} = 2p - 1 = 0$$

puisque $p = \frac{1}{2}$. Et :

$$V(\overline{X}_n) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{n \times 4p(1-p)}{n^2} = \frac{4p(1-p)}{n} = \frac{1}{n}.$$

par indépendance. Donc $\boxed{\overline{X}_n^{\star} = \sqrt{n}\overline{X}_n}$.

(b) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\begin{aligned} U_n^{1/\sqrt{n}} &= (\mathrm{e}^{n\overline{X_n}})^{1/\sqrt{n}} \\ &= \mathrm{e}^{\sqrt{n}\overline{X_n}} \\ &= \mathrm{e}^{\overline{X_n}^\star}. \end{aligned}$$

Or comme les X_n sont indépendantes identiquement distribuées et admettent toutes une espérance et une variance, le théorème limite central s'applique et on a $\boxed{\overline{X_n}^\star \xrightarrow{\mathcal{L}} X}$ où $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. De plus $U_n = f(\overline{X_n}^\star)$ où $f : t \mapsto \mathrm{e}^t$ qui est continue sur $\mathbb{R}$. Donc $f(\overline{X_n}^\star) \xrightarrow{\mathcal{L}} f(X)$. Or d'après la première question, $f(X)$ suit la même loi que Y. Donc :

$$\boxed{U_n^{1/\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} Y.}$$