DM9 Appliquées - Systèmes différentiels

À rendre le mardi 18/02/2025

Rendre une copie pour deux, en mentionnant bien les deux noms.

Exercice 1 - EML Appliquées 2023 (Exercice 2)

On considère la matrice A définie par : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Partie I - Réduction de la matrice A

1. (a) Quel est le rang de la matrice $A - 2I$?
   (b) Justifier que 2 est une valeur propre de A et déterminer la dimension du sous-espace propre E_2 associé à la valeur propre 2.
   (c) Donner une base de E_2.
   (d) Combien de valeurs propres autres que 2 la matrice A peut-elle avoir ?

   Remarque : *le sujet est mal rédigé vis-à-vis du nouveau programme et c'est sans doute une erreur.*
   Indication : *afin de donner une réponse dans le cadre du programme, on pourra raisonner par l'absurde. On montrera que si A possède au moins deux autres valeurs propres, alors on peut construire une famille libre de* $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ *de cardinal* 4.

2. (a) Dans cette sous-question M est une matrice dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ et U est le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Que représentent les coordonnées du vecteur colonne MU pour la matrice M ?
   (b) En déduire la dernière valeur propre de A ainsi qu'une base du sous-espace propre associé.
3. Donner une matrice $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale et une matrice $P \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$ (on ne demande pas de préciser P^{-1}).

Partie II - Un système différentiel

On considère le système différentiel :

$$(S) \left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & 3x + y + z \\ y' & = & x + 3y + z \\ z' & = & x + y + 3z \end{array} \right. ,$$

où x, y et z désignent des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

4. Résoudre le système différentiel (S).
5. (a) Quel résultat permet d'affirmer l'existence d'une unique solution $X_0 : t \mapsto \begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \\ z_0(t) \end{pmatrix}$ du système différentiel (S) telle que $X_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$?
   (b) Déterminer la solution X_0 de la question précédente.

Partie III - Un second système différentiel

Dans cette partie, on considère la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Déterminer les valeurs propres de B.

7. La matrice B est-elle diagonalisable ?
8. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que B est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
   On considère aussi les vecteurs $v_1 = (2, -1)$ et $v_2 = (-1, 0)$.
   (a) Justifier $\beta = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Quelle est la matrice T de l'endomorphisme f dans la base β ?
   (c) Donner une matrice Q inversible telle que $B = QTQ^{-1}$.
9. En déduire la résolution du système différentiel :

$$(\Sigma) \left\{ \begin{array}{ccc} x' & = & -x - 4y \\ y' & = & x + 3y \end{array} \right. ,$$

   où x et y sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.