DM9 Approfondies - Endomorphismes symétriques

À rendre le mardi 18/02/2025

Rendre une copie pour deux, en mentionnant bien les deux noms.

Exercice 1 - ECRICOME ECS 2009 (Exercice 1)

$\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. Pour tout élément $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle « trace de A », et on note $\mathrm{Tr}(A)$ la somme des éléments diagonaux, c'est-à-dire :

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

On admet que Tr est une application linéaire de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), \forall B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA).$$

On note ${}^tA$ la transposée de la matrice A. Pour toutes matrices M, N de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on pose :

$$\langle M|N\rangle = \mathrm{Tr}({}^tMN) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}n_{i,j}$$

où $m_{i,j}$ (resp. $n_{i,j}$) désigne le coefficient de M (resp. N) situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne.
Soit A une matrice symétrique, on considère :

- l'application Φ_A de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $\forall M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}),\ \Phi_A(M) = AM - MA$.
- l'ensemble $\mathrm{Sp}(A)$ formé des valeurs propres de A.
- l'ensemble $\mathrm{Sp}(\Phi_A)$ formé des valeurs propres de Φ_A.
- L'ensemble $\Gamma = \{\lambda - \mu,\ (\lambda,\mu) \in (\mathrm{Sp}(A))^2\}$ formé des différences de deux valeurs propres quelconques de A.

Le but de cet exercice est d'établir que les deux propriétés suivantes sont valables pour toute matrice symétrique à coefficients réels A :

- ⋆ Φ_A est un endomorphisme diagonalisable.
- ⋆ les valeurs propres de Φ_A forment l'ensemble Γ c'est-à-dire que $\mathrm{Sp}(\Phi_A) = \Gamma$.

Partie I - Étude d'un cas particulier

Dans cette partie uniquement, on suppose que $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et on admet les deux propriétés suivantes :

- Φ_A est un endomorphisme de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$,
- la famille (V_1, V_2, V_3, V_4) est une base de base de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ où l'on a posé :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ V_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ V_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier que la matrice T de l'endomorphisme Φ_A dans la base (V_1, V_2, V_3, V_4) s'écrit : $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

   En déduire la diagonalisabilité de T.
2. Vérifier que $T^3 = 4T$. Qu'en déduit-on sur les valeurs propres de T ?
3. Déterminer une base de l'espace propre associée à 0 de la matrice T.

4. Calculer TX_1 et TX_2 où $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
5. Expliciter alors une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $T = PDP^{-1}$ *(on ne demande pas le calcul de P^{-1}).*

Partie II - Réduction de Φ_A dans le cas général

On revient désormais au cas général, A étant une matrice symétrique quelconque de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

6. Montrer que Φ_A est un endomorphisme de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
7. Prouver que l'application $(M, N) \in (\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))^2 \mapsto \langle M|N \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
8. Établir que, pour toutes matrices M, N appartenant à $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on a : $\langle \Phi_A(M)|N \rangle = \langle M|\Phi_A(N) \rangle$.
   En déduire que Φ_A est un endomorphisme diagonalisable.
9. Soient :
   - $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ,
   - $Y \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre μ.

   On pose alors : $M_{X,Y} = X^tY \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

   (a) Justifier que $M_{X,Y} \neq 0$ puis que ${}^tYA = \mu^tY$.

   (b) Établir que $\Phi_A(M_{X,Y}) = (\lambda - \mu)M_{X,Y}$ puis que $\Gamma \subset \mathrm{Sp}(\Phi_A)$.
10. Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ un vecteur propre de Φ_A associé à la valeur propre α.

    (a) On suppose que pour tout vecteur propre Z de A, on a $MZ = 0$.
    Montrer alors que $M = 0$.
    En déduire qu'il existe au moins un vecteur propre Z_0 de A tel que $MZ_0 \neq 0$.
    On note μ la valeur propre associée à Z_0.

    (b) En revenant à l'expression de $\Phi_A(M)$, justifier que MZ_0 est un vecteur propre de A pour une valeur propre dont on précisera l'expression à l'aide de α et μ.

    (c) Conclure.