Chapitre B4 - Recherche d'extrema

1 Extrema sur un ouvert convexe

Définition : Ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dit que Ω est convexe si pour tout $(a,b) \in \Omega$ et pour $t \in [0,1]$, $ta + (1-t)b \in \Omega$.

Remarque : Cela signifie que tous les points sur le segment $[ab]$ sont dans Ω. Dit autrement, on peut "voir" tous les points de Ω (par visée directe) à partir de tout autre point de Ω.

Exemples :

- Les intervalles de la forme $]a,b[$ (avec éventuellement $a=-\infty$ ou $b=+\infty$) sont les ouverts convexes de $\mathbb{R}$.
- Les boules ouvertes de $\mathbb{R}^n$ sont convexes.
- Faire des dessins dans $\mathbb{R}^2$ de convexe et de non-convexe (concave).

Proposition

Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^2$ sur Ω. Soit x_0 un point critique de f.
Alors :

- si $\forall x \in \Omega$, $\mathrm{Sp}(\nabla^2 f(x)) \subset \mathbb{R}_+$ alors f admet un minimum global en x_0.
- si $\forall x \in \Omega$, $\mathrm{Sp}(\nabla^2 f(x)) \subset \mathbb{R}_-$ alors f admet un maximum global en x_0.

Remarques :

- Traduction dans le cas $n=1$. $f : x \mapsto \frac{1}{x} + \mathrm{e}^x$.
- Attention, la convexite de Ω n'a **rien** à voir avec la convexité de la fonction f.
- Cette fois, on peut avoir 0 dans le spectre.

Exemples :

- $f : (x,y) \mapsto 5x^2 + 2xy + 7y^2$;
- $g : (x,y) \mapsto \frac{1}{1-x^2-y^2}$.

2 Extrema sous contrainte d'égalités linéaires

2.1 Définitions

Définition

Dans la suite, pour un système de constraintes linéaires :

$$\begin{cases} g_1(x) &= b_1 \\ g_2(x) &= b_2 \\ &\vdots \\ g_p(x) &= b_p \end{cases}$$

on appelle :

$$\begin{cases} g_1(x) &= 0 \\ g_2(x) &= 0 \\ &\vdots \\ g_p(x) &= 0 \end{cases}$$

le système homogène associé. On notera $\mathcal{C}$ l'ensemble de ses solutions et $\mathcal{H}$ l'ensemble des solutions du système homogène associé.

Remarque : On cherche donc le maximum sur l'intersection des lignes de niveaux de g_1, g_2, ..., g_p.

Proposition

Soit $x_0 \in \mathcal{C}$. On a :

$$\mathcal{C} = \{x_0 + h, h \in \mathcal{H}\}.$$

Définition : Extremum local sous contrainte

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et soit $\mathcal{C}$ une constrainte linéaire. On dit que f admet un maximum local (resp. un minimum local) en $x_0 \in \mathcal{C}$ s'il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathring{B}(x_0, r) \cap \mathcal{C},\ \ f(x) \leqslant f(x_0) \quad (\text{resp. } f(x) \geqslant f(x_0)).$$

2.2 Condition nécessaire

Lemme

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω ouvert. Si f admet un extremum local en x_0 sur $\mathcal{C}$ alors :

$$\nabla f(x_0) \in \mathcal{H}^\perp.$$

Démonstration : *à faire. Soit $h \in \mathcal{H}$. Regarder la dérivée de $h : t \mapsto f(x_0 + th)$.* □

Remarque : $\nabla g_1(x_0)$ est orthogonal à la ligne de niveau de g_1 passant par x_0. De même, $\nabla g_i(x_0)$ est orthogonal à la ligne de niveau de g_i passant par x_0 (vu autrement : les g_i sont constants sur $\mathcal{C}$ donc admettent des extrema locaux en tout point). Donc $\mathrm{Vect}(\nabla g_1(x_0), \dots, \nabla g_p(x_0)) \subset \mathcal{H}^\perp$. En fait, on a la proposition suivante.

Proposition

On a :

$$\mathcal{H}^\perp = \mathrm{Vect}(\nabla g_1(x_0), \dots, \nabla g_p(x_0)).$$

Démonstration : *Montrer que* $\mathrm{Vect}(\nabla g_1(x_0), \dots, \nabla g_p(x_0))^\perp \subset \mathcal{H}$. □

Proposition

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω ouvert. Si f admet un extremum local en x_0 sur $\mathcal{C}$ alors :

$$\nabla f(x_0) \in \mathrm{Vect}(\nabla g_1(x_0), \dots, \nabla g_p(x_0)).$$

Remarque : On peut aussi écrire ce résultat, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla g_1(x_0) + \cdots + \lambda_p \nabla g_p(x_0) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla g_i(x_0).$$

Définition : Point critique sous contrainte

Soit $x_0 \in \mathcal{C}$. On dit que x_0 est un point critique de f (pour l'optimisation) sous la contrainte $\mathcal{C}$ si $\nabla f(x_0) \in \mathcal{H}^\perp = \mathrm{Vect}(\nabla g_1(x_0), \dots, \nabla g_p(x_0))$.

2.3 Exemples d'applications

Méthode

1. On détermine $\mathcal{H}^\perp$.
2. On calcule le gradient de f en tout point.
3. On résout le système :

$$\begin{cases} \nabla f(x) &= \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla g_i(x) \\ g_1(x) &= b_1 \\ g_2(x) &= b_2 \\ &\vdots \\ g_p(x) &= b_p \end{cases}$$

   pour trouver les points critiques sous contraintes.
4. on cherche à déterminer la nature du point critique (pas de méthode générale au programme).

Exemples :

- $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2$ et $2x - y + z = 3$;
- $f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ et $x_1 + \cdots + x_n = n$.

Méthode

Cas avec 1 contrainte

1. On peut appliquer la méthode précédente.
2. On peut résoudre n variables fonctions de $n-1$ et étudier $f : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ (étude global plus facile).

Exemple : $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2$ et $2x - y + z = 3$.