Correction DM9 Appliquées - Systèmes différentiels

Exercice 1 - EML Appliquées 2023 (Exercice 2)

Partie I - Réduction de la matrice A

1. (a) On a :

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\boxed{\text{rg}(A-2I) = 1}$ puisque les colonnes sont toutes proportionnelles (et même égales) et non nulles.

(b) Comme $\text{rg}(A-2I) < 3$, $A-2I$ est non inversible et donc $\boxed{2 \in \text{Sp}(A).}$
Si on note f l'application canoniquement associée à A, $A-2I$ est la matrice de l'application $f - 2\text{Id}$. D'après le théorème du rang, on a :

$$\underbrace{\text{rg}(f-2\text{Id})}_{=\text{rg}(A-2I)=1} + \dim \text{Ker}(f-2\text{Id}) = 3.$$

Donc $\dim \text{Ker}(f-2\text{Id}) = 2$. Or, si on note $X \in \text{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} X \in E_2(A) &\Leftrightarrow AX = 2X \\ &\Leftrightarrow (A-2I)X = 0 \\ &\Leftrightarrow (f-2\text{Id})(X) = 0 \\ &\Leftrightarrow X \in \text{Ker}(f-2\text{Id}). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\dim E_2(A) = \dim \text{Ker}(f-2\text{Id}) = 2.}$$

Remarque : la question, bien que dans le suejt 2023, a clairement été rédigée avec les anciens programmes en tête (qui contenait une formule pour le calcul de la dimension à partir du rang). Je vous l'ai laissé afin que vous puissiez répondre si l'erreur était amenée à se répéter.

(c) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} X \in E_2(A) &\Leftrightarrow AX = 2X \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y + z = 2x \\ x + 3y + z = 2y \\ x + y + 3z = 2z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x + y + z = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow X \in \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Donc $\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrie de $E_2(A)$. Comme :

$$\operatorname{card}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)=2=\dim E_2(A)$$

c'est $\boxed{\text{une base de } E_2(A).}$

(d) Montrons par l'absurde que A ne peut avoir qu'une seule autre valeur propre.
Supposons que A possède au moins deux autres valeurs propres λ_1 et λ_2 distinctes. Soient v_1 et v_2 deux vecteurs propres associés. Soient (u_1,u_2) une base de $E_2(A)$.
(v_1) et (v_2) sont deux familles d'un unique vecteur chacune non nul et sont donc libres.
(u_1,u_2) est une base et est donc libre.
La famille (u_1,u_2,v_1,v_2) est la concaténation de familles libres de sous-espaces propres distincts. C'est donc une famille libre.
Ainsi (u_1,u_2,v_1,v_2) est une famille libre de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Donc :

$$\boxed{\underbrace{\operatorname{card}(u_1,u_2,v_1,v_2)}_{=4}\leqslant\underbrace{\dim \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})}_{=3}}$$

ce qui est absurde.
Donc $\boxed{A \text{ possède au plus une autre valeur propre.}}$

2. (a) Notons $M=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$. On a :

$$MU=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}+a_{12}+a_{13}\\a_{21}+a_{22}+a_{23}\\a_{31}+a_{32}+a_{33}\end{pmatrix}.$$

Ainsi $\boxed{\text{les coordonnées de } MU \text{ sont les sommes des coefficients des lignes de } M.}$

(b) Comme la somme des coefficients des lignes de A donnent systématiquement 5, on a :

$$AU=\begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix}=5U.$$

Comme $U\neq 0$, U est donc un vecteur propre de A pour la valeur propre 5. Et donc $\boxed{5\in \mathrm{Sp}(A).}$
Puisqu'on a montré que A a au plus une autre valeur propre, on en déduit que :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A)=\{2,5\}.}$$

3. La famille (U) est donc une famille d'un unique vecteur non nul et donc est libre. C'est donc une famille libre de $E_5(A)$.
Ainsi, la famille $\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est la concaténation de familles libres de sous-espaces propres distincts et est donc libre. Puis comme :

$$\operatorname{card}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)=\dim \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}),$$

c'est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Ainsi il existe une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A. Donc $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$ (on le savait déjà puisque A est symétrique).

On a finalement :

$$A = PDP^{-1}$$

avec :

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.}$$

Partie II - Un système différentiel

4. Si on pose pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, alors le système est équivalent à $X' = AX$.

   Comme A est diagonalisable, l'ensemble des solutions est l'ensemble des fonctions de la forme :

$$\boxed{t \mapsto a\mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c\mathrm{e}^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

   où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On peut le réécrire en terme de x, y, z de la manière suivante :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & -(a+b)\mathrm{e}^{2t} + c\mathrm{e}^{5t} \\ y(t) & = & a\mathrm{e}^{2t} + c\mathrm{e}^{5t} \\ z(t) & = & b\mathrm{e}^{2t} + c\mathrm{e}^{5t} \end{array} \right. .}$$

5. (a) (S) associé à la condition $X_0(0)$ forme un $\boxed{\text{problème de Cauchy}}$ (pour un système différentiel linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants). C'est pourquoi il existe une unique solution à ce problème.

   (b) On sait que :

$$X \text{ satisfait } (S) \Leftrightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall t \in \mathbb{R}, X(t) = a\mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c\mathrm{e}^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   En réinjectant la condition initiale dans cette formule, on obtient :

$$\begin{aligned} X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} & \Leftrightarrow a\mathrm{e}^{2\times 0} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\mathrm{e}^{2\times 0} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c\mathrm{e}^{5\times 0} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & -1 \\ b & = & 0 \\ c & = & 0 \end{array} \right. . \end{aligned}$$

   Pour la dernière équivalence, on a utilisé le fait qu'on peut facilement vérifier que $(a, b, c) = (-1, 0, 0)$ est bien solution et que l'unicité de la solution est justifiée par le fait que $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base (et est donc libre).

   Ainsi la fonction X définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boxed{X(t) = -\mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

   est l'unique solution du problème de Cauchy.

Partie III - Un second système différentiel

6. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(B) & \Leftrightarrow B - \lambda I \text{ est non inversible} \\ & \Leftrightarrow \det(B - \lambda I) = 0 \\ & \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -4 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0 \\ & \Leftrightarrow (-1-\lambda)(3-\lambda) - 1 \times (-4) = 0 \\ & \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda 1 = 0 \\ & \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \\ & \Leftrightarrow \lambda = 1. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathrm{Sp}(B) = \{1\}.}$

7. Montrons par l'absurde que B n'est pas diagonalisable.
Supposons B diagonalisable. Il existe donc P inversible et D diagonale telle que : $B = PDP^{-1}$.
Puisque $\mathrm{Sp}(B) = \{1\}$, nécessairement $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$.
Ainsi :
$$B = PDP^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I \neq B.$$
C'est donc absurde et donc $\boxed{B \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

8. (a) (v_1, v_2) est une famille de deux vecteurs non-colinéaires. C'est donc une famille libre. Puisque :
$$\mathrm{card}(v_1, v_2) = 2 = \dim \mathbb{R}^2,$$
c'est $\boxed{\text{une base de } \mathbb{R}^2.}$

(b) La matrice de v_1 dans la base canonique est $V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. On a :
$$BV_1 = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+4 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = V_1.$$
Ainsi $\boxed{f(v_1) = v_1.}$

De même, la matrice de v_2 dans la base canonique est $V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On a :
$$BV_2 = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = V_1 + V_2.$$
Ainsi $\boxed{f(v_2) = v_1 + v_2.}$
Ainsi la matrice de f dans la base β est :
$$\boxed{T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

(c) D'après la formule de changement de base, on a :
$$B = \mathcal{P}_{C,\beta} T \mathcal{P}_{C,\beta}^{-1}$$
où $\mathcal{P}_{C,\beta}$ est la matrice de passage de la base canonique à la base β.
On peut donc poser :
$$\boxed{Q = \mathcal{P}_{C,\beta} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

9. En posant pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t)\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{aligned} X \text{ satisfait } (\Sigma) &\Leftrightarrow X' = BX \\ &\Leftrightarrow X' = QTQ^{-1}X \\ &\Leftrightarrow Q^{-1}X' = TQ^{-1}X. \end{aligned}$$

Si on note $Q^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a :

$$Q^{-1}X' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax'(t) + by'(t) \\ cx'(t) + dy'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (ax+by)'(t) \\ (cx+dy)'(t) \end{pmatrix} = (Q^{-1}X)'(t).$$

Ainsi X satisfait (Σ) si et seulement si $Q^{-1}X$ vérifie $Y' = TY$ (d'inconnue Y).

Concentrons-nous sur ce système. En notant $Y(t) = \begin{pmatrix} z(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$, on a :

$$Y' = TY \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} z' & = & z + w \\ w' & = & w \end{array} \right. .$$

C'est un système triangulaire. Les solutions de la seconde équation sont les fonctions de la forme $t \mapsto A\mathrm{e}^t$ avec $A \in \mathbb{R}$. Ainsi :

$$Y' = TY \Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{rcl} z' & = & z + w \\ \forall t \in \mathbb{R}, w(t) & = & A\mathrm{e}^t \end{array} \right. \Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{rcl} z' & = & z + A\mathrm{e}^t \\ \forall t \in \mathbb{R}, w(t) & = & A\mathrm{e}^t \end{array} \right. .$$

Résolvons $z' = z + A\mathrm{e}^t$ pour A fixé. L'équation homogène associée est $z' = z$ dont les solutions sont les fonctions de la forme $z : t \mapsto B\mathrm{e}^t$.

Il nous faut maintenant une solution particulière. On peut aller chercher une fonction de la forme $\tilde{z} : t \mapsto Ct\mathrm{e}^t$.

Remarque : *le sujet nous fait encore un sal coup... Aucune technique n'est au programme pour trouver une telle solution particulière. Si vous essayez mon conseil général de mettre une solution particulière de la même forme que le second membre, ça ne fonctionne pas car le concepteur du sujet a choisi LA forme d'équation pour laquelle ça ne fonctionne pas...*

À ce stade, honnêtement, j'ai tendance à simplement dire : heureusement que vous ne passez pas le concours en 2023.

On a :

$$\tilde{z'} = \tilde{z} + A\mathrm{e}^t \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ C\mathrm{e}^t + Ct\mathrm{e}^t = Ct\mathrm{e}^t + A\mathrm{e}^t \Leftrightarrow A = C.$$

Et donc : $\tilde{z} : t \mapsto At\mathrm{e}^t$ est solution particulière.

Ainsi l'ensemble des solutions de $z' = z + A\mathrm{e}^t$ est l'ensemble des fonctions de la forme :

$$\boxed{t \mapsto B\mathrm{e}^t + At\mathrm{e}^t.}$$

Ainsi les solutions de $Y' = TY$ sont les fonctions de la forme :

$$\boxed{Y : t \mapsto \begin{pmatrix} B\mathrm{e}^t + At\mathrm{e}^t \\ A\mathrm{e}^t \end{pmatrix}.}$$

Puis si $Y = Q^{-1}X$ alors $X = QY$. On a avec la forme précédente :

$$QY(t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B\mathrm{e}^t + At\mathrm{e}^t \\ A\mathrm{e}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2B + (2t-1)A)\mathrm{e}^t \\ -(B + At)\mathrm{e}^t \end{pmatrix} = A\mathrm{e}^t\begin{pmatrix} 2t-1 \\ -t \end{pmatrix} + B\mathrm{e}^t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi les solutions du système $X' = BX$ sont les fonctions de la forme :

$$\boxed{X : t \mapsto A\mathrm{e}^t\begin{pmatrix} 2t-1 \\ -t \end{pmatrix} + B\mathrm{e}^t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.}$$