Correction DM9 Approfondies - Endomorphismes symétriques

Exercice 1 - ECRICOME ECS 2009 (Exercice 1)

Partie I - Étude d'un cas particulier

1. Calculons les images des vecteurs de base par Φ_A. On a :

$$\Phi_A(V_1) = AV_1 - V_1A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -V_2 + V_3.$$

On a de même :

$$\begin{aligned} \Phi_A(V_2) &= -V_1 + V_4, \\ \Phi_A(V_3) &= V_1 - V_4, \\ \Phi_A(V_4) &= V_2 - V_3. \end{aligned}$$

Et donc la matrice T de Φ_A dans la base des V_i est :

$$\boxed{T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

2. Calculons :

$$\begin{aligned} T^3 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{4T.} \end{aligned}$$

On en déduit que $X^3 - 4X$ est un polynôme annulateur de T. Or $X^3 - 4X = X(X^2-4) = X(X-2)(X+2)$ qui a donc pour racines $\{-2, 0, 2\}$.
Or les valeurs propres de T sont nécessairement racines du polynôme annulateur trouvé. Donc :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(T) \subset \{-2, 0, 2\}.}$$

3. Techniquement, pour l'instant on ne sait pas que $E_0(T)$ est effectivement un espace propre, puisqu'on ne sait pas si 0 est bien une valeur propre.
Mais on peut chercher une base de l'espace et si on n'en trouve une non-vide, cela prouvera du même coup que 0 est bien valeur propre.

Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. On a :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -y+z & = & 0 \\ -x+t & = & 0 \\ x-t & = & 0 \\ y-z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x-t & = & 0 \\ y-z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & t \\ y & = & z \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc la famille $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ engendre l'espace $E_0(T)$.

Et comme elle est clairement libre, c'en est une base.

4. Calculons :

$$\boxed{TX_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2X_1.}$$

X_1 est donc vecteur propre de T pour la valeur propre 2.

De même, on a :

$$\boxed{TX_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -2X_2}$$

et X_2 est donc vecteur propre de T pour la valeur propre -2.

5. On pose $\mathcal{B}' = (U_1, U_2, U_3, U_4) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ la famille constituée des vecteurs étudiés jusqu'à présent. Puisque c'est la concaténation de familles libres issus d'espaces propres distincts, elle est à son tour libre. Et comme elle est de taille 4 dans un espace de dimension 4, c'est une base.

$\mathcal{B}'$ est donc une base de $\mathbb{R}^4$ constituée de vecteurs propres de T.

On pose donc :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

la matrice de passage de la base (V_1, V_2, V_3, V_4) à la base $\mathcal{B}'$ (qui est donc inversible). Et on a donc :

$$\boxed{T = PDP^{-1}}$$

avec :

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.}$$

Partie II - Réduction de Φ_A dans le cas général

6. Pour tout $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\Phi_A(M) = AM - MA \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Il suffit donc de vérifier que Φ_A est linéaire pour montrer que c'est un endomorphisme.
   Soient $M, N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :
   $$\begin{aligned}\Phi_A(M+\lambda N) &= A(M+\lambda N) - (M+\lambda N)A \\ &= AM + \lambda AN - MA - \lambda NA \\ &= AM - MA + \lambda(AN - NA) \\ &= \Phi_A(M) + \lambda \Phi_A(N).\end{aligned}$$
   Donc Φ_A est bien linéaire et est donc un endomorphisme.
7. Notons $f : (M, N) \mapsto \langle M|N\rangle = \mathrm{Tr}({}^tMN)$. Vérifions les propriétés suivantes :
   - **Linéarité à gauche :** Soient $M, M', N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :
     $$\begin{aligned}f(M+\lambda M', N) &= \mathrm{Tr}({}^t(M+\lambda M')N) \\ &= \mathrm{Tr}({}^tMN + \lambda {}^tM'N) \\ &= \mathrm{Tr}({}^tMN) + \lambda \mathrm{Tr}({}^tM'N) \\ &= f(M,N) + \lambda f(M', N).\end{aligned}$$
     Donc f est bien linéaire à gauche.
   - **Symétrie :** Soient $M, N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On a :
     $$\begin{aligned}f(M,N) &= \mathrm{Tr}({}^tMN) \\ &= \mathrm{Tr}({}^t({}^tMN)) = \mathrm{Tr}({}^tNM) \\ &\quad \text{(car la trace est invariante par transposition)} \\ &= f(N,M).\end{aligned}$$
     Donc f est symétrique. Avec la linéarité à gauche, cela prouve que f est bilinéaire.
   - **Positivité :** Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On a :
     $$f(M,M) = \mathrm{Tr}({}^tMM) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j}m_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j}^2 \geq 0.$$
     Donc f est bien positive.
   - **Définition :** Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose $f(M,M) = 0$. Montrons que $M = 0$. Avec ce qui précède, on a : $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j}^2 = 0$. Or une somme de termes positifs est nulle seulement si tous les termes sont nuls. Donc $\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ m_{i,j}^2 = 0$. D'où encore : $\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ m_{i,j} = 0$. C'est-à-dire :
     $$\boxed{M = 0.}$$
     Donc f est bien définie.

   Donc f (c'est-à-dire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$) est bien un produit scalaire sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
8. Soient $M, N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On a :
   $$\begin{aligned}\langle \Phi_A(M)|N\rangle &= \mathrm{Tr}({}^t\Phi_A(M)N) = \mathrm{Tr}({}^t(AM - MA)N) \\ &= \mathrm{Tr}({}^tM{}^tAN - {}^tA{}^tMN) = \mathrm{Tr}({}^tMAN - A{}^tMN) \text{ (car } A \text{ est symétrique)} \\ &= \mathrm{Tr}({}^tMAN) - \mathrm{Tr}(A{}^tMN) = \mathrm{Tr}({}^tMAN) - \mathrm{Tr}({}^tMNA) \text{ (car } \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)) \\ &= \mathrm{Tr}({}^tM(AN - NA)) = \mathrm{Tr}({}^tM\Phi_A(N)) \boxed{= \langle M|\Phi_A(N)\rangle.}\end{aligned}$$
   On en déduit donc que Φ_A est un endomorphisme symétrique et qu'il est donc diagonalisable en base orthonormée.

9. (a) On a :

$$M_{X,Y}Y = X^tYY = X\|Y\|^2 = \|Y\|^2X.$$

Or $\|Y\|^2 \neq 0$ puisque $Y \neq 0$. Et comme $X \neq 0$, on a $M_{X,Y}Y \neq 0$. On a donc : $\boxed{M_{X,Y} \neq 0}$. Par ailleurs, on a :

$$\boxed{{}^tYA = {}^tY^tA = {}^t(AY) = {}^t(\mu Y) = \mu^tY.}$$

(b) On a :

$$\begin{aligned}
\Phi_A(M_{X,Y}) &= AM_{X,Y} - M_{X,Y}A = AX^tY - X^tYA \\
&= \lambda X^tY - X(\mu^tY) = (\lambda - \mu)X^tY \\
&= \boxed{(\lambda - \mu)M_{X,Y}.}
\end{aligned}$$

Comme $M_{X,Y} \neq 0$, on en déduit que $M_{X,Y}$ est vecteur propre de Φ_A pour la valeur propre $\lambda - \mu$. D'où $\lambda - \mu \in \mathrm{Sp}(\Phi_A)$. Et comme ce résultat est valable pour tout vecteur propre X associé à λ et tout vecteur propre Y associé à μ, on a bien :

$$\boxed{\Gamma \subset \mathrm{Sp}(\Phi_A).}$$

10. (a) On suppose que pour tout vecteur propre Z de A, on a $MZ = 0$.
A est symétrique donc diagonalisable. Soient $(U_1, \ldots, U_n)$ une base de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A. On a donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $MU_i = 0$. Mais comme les U_i forment une base, cela implique $\boxed{M = 0}$.
Or $M \neq 0$ puisque c'est un vecteur propre. Donc par contraposée,
<u>il existe Z_0 vecteur propre de A tel que $MZ_0 \neq 0$.</u>

(b) On a par définition de M : $\Phi_A(M) = \alpha M$. Donc en particulier :

$$\Phi_A(M)Z_0 = \alpha MZ_0.$$

Or :

$$\Phi_A(M)Z_0 = (AM - MA)Z_0 = AMZ_0 - M(\mu Z_0)$$

où on a noté μ la valeur propre de Z_0 pour A. Ainsi $AMZ_0 - \mu MZ_0 = \alpha MZ_0$ que l'on peut réécrire :

$$\boxed{AMZ_0 = (\alpha + \mu)MZ_0}$$

Comme $MZ_0 \neq 0$, MZ_0 est vecteur propre de A pour la valeur propre $\alpha + \mu$.

(c) Ainsi si α est valeur propre de Φ_A, il existe $\mu \in \mathrm{Sp}(A)$ tel que $\alpha + \mu \in \mathrm{Sp}(A)$. Dit autrement, il existe $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ tel que $\lambda = \alpha + \mu$ et donc on peut écrire :

$$\boxed{\alpha = \lambda - \mu.}$$

Ainsi :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(\Phi_A) \subset \Gamma.}$$

On a déjà montré l'inclusion réciproque et donc :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(\Phi_A) = \Gamma.}$$