ecricome

SUJET ZÉRO

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES
VOIE ECG

CONCOURS ECRICOME PRÉPA 2023

Mathématiques appliquées - Sujet zéro 1

Exercice 1

Partie 1

Soit A la matrice carrée d'ordre 3 donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et soit f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est A.

1. Déterminer le rang de $A - 6I_3$.
   En déduire une valeur propre de A et la dimension du sous-espace propre associé.
2. Soit $V = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $U = AV - 2V$.
   Montrer que U est un vecteur propre de A et déterminer la valeur propre associée.
3. Posons $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que (U, V, W) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   (b) Donner la matrice B de f dans cette base.
   (c) Montrer alors qu'il existe une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$ et expliciter la matrice P. On ne cherchera pas P^{-1}.
4. La matrice A est-elle inversible ? La matrice A est-elle diagonalisable ?

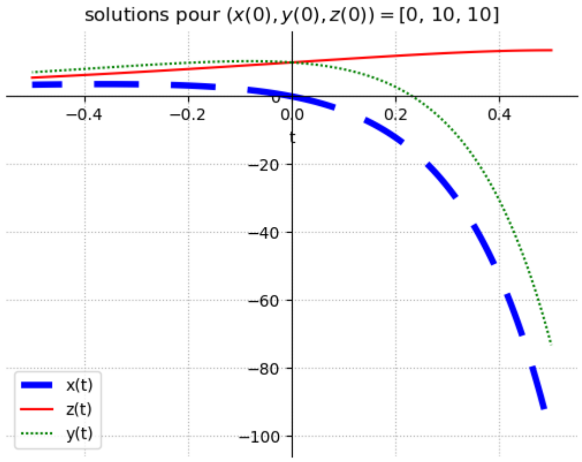
Partie 2

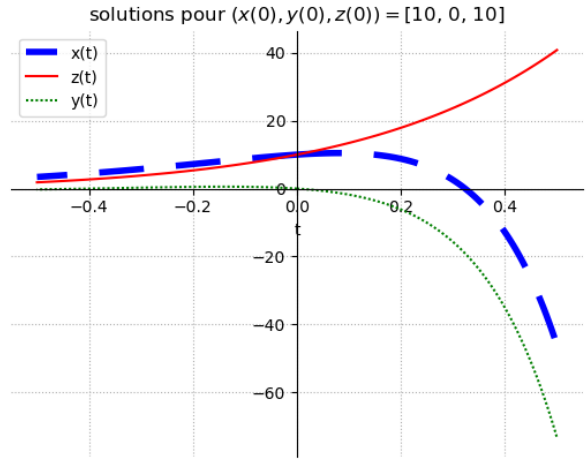
On considère le système différentiel suivant :

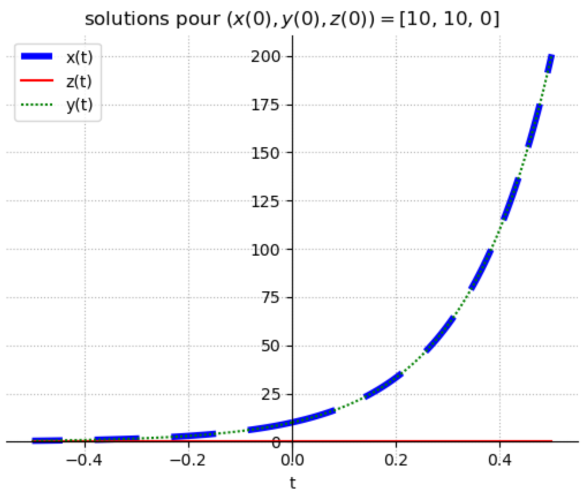
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x'(t) &= 5x(t) + y(t) - 4z(t), \\ y'(t) &= 3x(t) + 3y(t) - 4z(t), \\ z'(t) &= x(t) - y(t) + 2z(t). \end{cases}$$

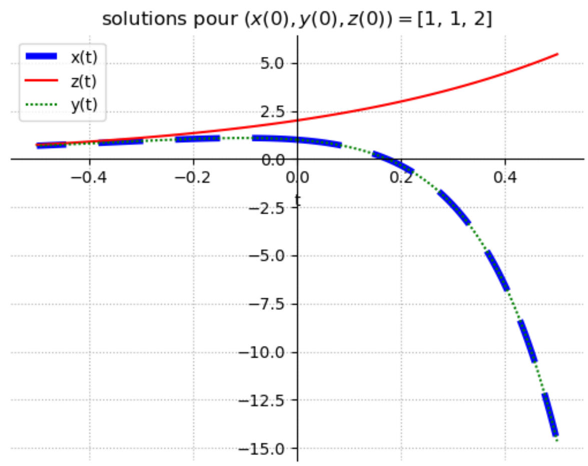
où x, y, z sont trois fonctions inconnues, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On note pour tout réel t : $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

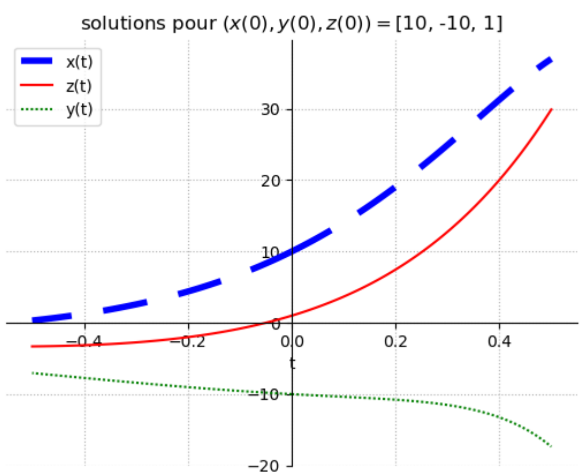
5. En utilisant le module `scipy.integrate` de Python, on obtient le tracé suivant des solutions du système, en faisant varier les valeurs de $x(0)$, $y(0)$, $z(0)$.

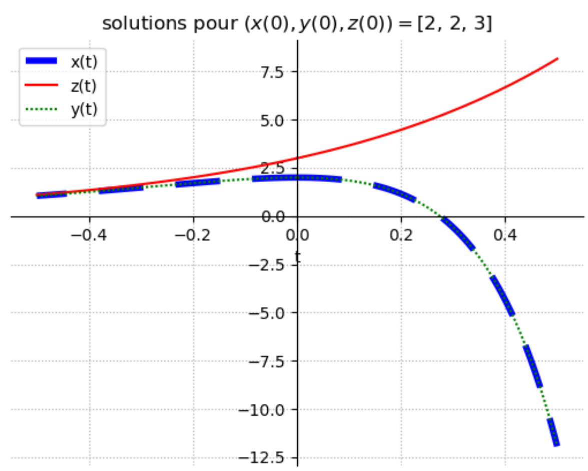












Que peut-on conjecturer quand $x(0) = y(0)$?

6. Montrer que pour tout réel t : $X'(t) = A\,X(t)$.
7. On note pour tout réel t : $Y(t) = P^{-1}X(t)$. On admet que pour tout réel t, $Y'(t) = P^{-1}X'(t)$.
   Montrer que pour tout réel t : $Y'(t) = B\,Y(t)$.

8. (a) Donner les fonctions φ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle $(\mathscr{E}_1)$:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) = 6\varphi(t) \qquad (\mathscr{E}_1)$$

(b) Donner les fonctions φ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle $(\mathscr{E}_2)$:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) = 2\varphi(t) \qquad (\mathscr{E}_2)$$

(c) Soit c un réel.
Montrer que la fonction $t \longmapsto cte^{2t}$ est une solution de l'équation différentielle $\mathscr{E}_3$:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) = 2\varphi(t) + ce^{2t} \qquad (\mathscr{E}_3)$$

Déterminer toutes les solutions de $(\mathscr{E}_3)$.

9. En notant, pour tout réel t, $Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}$, montrer que γ est solution de $(\mathscr{E}_1)$, β est solution de $(\mathscr{E}_2)$ et α est solution de $(\mathscr{E}_3)$ pour un réel c bien choisi.

10. Montrer qu'il existe trois réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & 2(\lambda_1 t + \lambda_1 + \lambda_2)e^{2t} + \lambda_3 e^{6t} \\ y(t) & = & 2(\lambda_1 t + \lambda_2)e^{2t} + \lambda_3 e^{6t} \\ z(t) & = & (2\lambda_1 t + \lambda_1 + 2\lambda_2)e^{2t} \end{array} \right.$$

11. En déduire, en notant $x_0 = x(0)$, $y_0 = y(0)$ et $z_0 = z(0)$, que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & \left((x_0 - y_0)t + z_0 + \dfrac{1}{2}(x_0 - y_0) \right) e^{2t} + \left(\dfrac{1}{2}(x_0 + y_0) - z_0 \right) e^{6t} \\ y(t) & = & \left((x_0 - y_0)t + z_0 + \dfrac{1}{2}(y_0 - x_0) \right) e^{2t} + \left(\dfrac{1}{2}(x_0 + y_0) - z_0 \right) e^{6t} \\ z(t) & = & \Big((x_0 - y_0)t + z_0 \Big) e^{2t} \end{array} \right.$$

12. Justifier la conjecture faite à la question 5.

Exercice 2

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.
Seul le résultat de la question 4 de la partie 1 est utilisé dans la partie 2 à l'endroit indiqué (à la question 8).

Partie 1

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,1[$ par :

$$\forall x \in [0,1[, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

1. Justifier que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1[$.
2. (a) Soit $x \in]0,1[$.
   Montrer par récurrence que

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t$$

   où $f^{(n)}$ désigne la dérivée $n^{\text{ème}}$ quand n est un entier naturel non nul de f et $f^{(0)} = f$.
   Indication : dans l'hérédité, on effectuera une intégration par parties.

   (b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, la dérivée $f^{(n)}$ de f est donnée par :

   $$\forall x \in [0,1[,\ f^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}(1-x)^{-n-\frac{1}{2}}.$$

   (c) En déduire que :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k + \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t.$$

3. Soit x un réel de $]0,1[$.

   (a) Montrer que la fonction $\varphi_x : t \mapsto \dfrac{x-t}{1-t}$ est décroissante sur l'intervalle $[0,x]$.

   (b) Montrer que pour tout entier naturel n :

   $$0 \leqslant \int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t \leqslant 2x^n\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1\right).$$

   (c) On **admet** que :

   $$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\, n^n \mathrm{e}^{-n}.$$

   Montrer que :

   $$\frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}.$$

   (d) En déduire que :

   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t = 0.$$

4. Soit x un réel de $]0,1[$.
   Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k$ converge et que :

   $$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k.$$

Partie 2

Soit p un réel fixé dans l'intervalle $]0, 1[$.
On considère une suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs dans $\{-1, 1\}$ mutuellement indépendantes, de même loi, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y_n = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y_n = -1) = 1 - p.$$

Posons :

$$\begin{cases} X_0 = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = X_n + Y_n. \end{cases}$$

5. (a) Écrire une fonction Python `simulY(p)` qui prend en argument la valeur de p et qui renvoie une simulation de la variable aléatoire Y_0, c'est-à-dire qu'elle doit renvoyer 1 avec une probabilité p et -1 avec une probabilité $1 - p$.

   (b) Écrire une fonction Python `marche(n,p)` prenant en argument le couple (n, p) et qui renvoie une simulation de la variable aléatoire X_n.

6. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$: $Z_n = \dfrac{Y_n + 1}{2}$.

   (a) Reconnaître la loi de Z_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et préciser son(ses) paramètre(s).

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la loi de la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} Z_k$?

   (c) Montrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$: $X_n = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} Z_k \ - \ n$.

7. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$p_{2n+1} = 0 \quad \text{et} \quad p_{2n} = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n.$$

8. On considère dans cette question le cas où $p \neq \dfrac{1}{2}$.

   (a) Montrer que : $0 < p(1-p) < \dfrac{1}{4}$.

   (b) Montrer à l'aide de la partie 1 que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} p_{2n}$ converge et déterminer sa somme.

9. On considère dans cette question le cas où $p = \dfrac{1}{2}$.

   (a) Montrer que : $p_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

   (b) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} p_{2n}$ diverge et $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} p_{2n} = +\infty$.

Exercice 3

Soit $(F_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par

$$\begin{cases} F_0 = 0, \\ F_1 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n. \end{cases}$$

Partie 1

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $F_n > 0$ et $F_{n+1} > 0$.
   (b) Montrer que la suite $(F_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement croissante à partir du rang 2.
   (c) Pour tout entier n non nul, donner une expression de F_n uniquement en fonction de n.
   (d) En déduire que $(F_n)_{n\geqslant 0}$ diverge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n = +\infty$.
2. Écrire une fonction Python `fibo(n)` prenant en argument un entier naturel n et renvoyant la valeur de F_n.

   Si on exécute le script Python suivant

```
L=[]
for k in range(20):
    L.append(fibo(k))
print(L)
```

   on doit obtenir :

   `[0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181]`

3. Écrire une fonction `recherche(x, L)` prenant en entrée :
   — un entier naturel `x`
   — une liste `L` déjà triée dans l'ordre croissant, dont le premier élément est inférieur ou égal à `x` et le dernier est strictement supérieur à `x`
   et qui renvoie le plus grand élément de la liste `L` qui soit inférieur ou égal à `x`.

Partie 2

On s'intéresse dans cette partie au théorème suivant, appelé **Théorème de Zeckendorf**

> Pour tout entier naturel non nul n, il existe un unique entier k et un unique k-uplet d'entiers $(c_1, \ldots, c_k)$, verifiant :
>
> ⋆ $c_1 \geqslant 2$
>
> ⋆ pour tout i appartenant à $[\![1, k-1]\!]$, $c_i + 1 < c_{i+1}$,
>
> tels que :
>
> $$n = \sum_{i=1}^{k} F_{c_i},$$
>
> Cette décomposition s'appelle la **décomposition de Zeckendorf** du nombre n.

Par exemple, $n = 4$ se décompose en : $4 = 1 + 3 = F_2 + F_4$. Donc $k = 2$ et $(c_1, c_2) = (2, 4)$.

Par ailleurs, $n = 17$ se décompose en : $17 = 1 + 3 + 13 = F_2 + F_4 + F_7$. Donc $k = 3$ et $(c_1, c_2, c_3) = (2, 4, 7)$.

4. On rappelle que la liste des premiers termes de la suite $(F_n)_{n\geqslant 0}$ a été donnée dans la question 2.
   (a) En remarquant que $6 = 1+2+3 = F_2+F_3+F_4$ et aussi que $6 = 1+5 = F_2+F_5$, donner la décomposition de Zeckendorf de 6 et justifier votre choix.
   (b) Donner la décomposition de Zeckendorf du nombre 35.
   (c) Donner la décomposition de Zeckendorf du nombre 130.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Justifier l'existence d'un entier J supérieur ou égal à 2 tel que $\forall i \geqslant J,\ F_i \geqslant n+1$.
   (b) Notons $A_n = \{i \in \mathbb{N}^*,\ F_i \leqslant n\}$.
   Montrer que $2 \in A_n$ et que A_n contient au plus J éléments.
   (c) Soit alors $j = \max(A_n)$, c'est-à-dire j est le plus grand entier appartenant à A_n.
   Montrer que $j \geqslant 2$ et que
   $$F_j \leqslant n < F_{j+1}.$$
   (d) Démontrer que $n - F_j < F_{j-1}$.
   (e) Supposons qu'il existe un entier k' et un k'-uplet $(c'_1, \ldots, c'_{k'})$ d'entiers naturels tels que
   $$c'_1 \geqslant 2, \quad \forall i \in [\![1, k'-1]\!], c'_i + 1 < c'_{i+1} \quad \text{et} \quad n - F_j = \sum_{i=1}^{k'} F_{c'_i}.$$
   Montrer qu'il existe un entier k que l'on exprimera à l'aide de k' et qu'il existe un k-uplet $(c_1, \ldots, c_k)$ d'entiers naturels tels que
   $$c_1 \geqslant 2, \quad \forall i \in [\![1, k-1]\!], c_i + 1 < c_{i+1} \quad \text{et} \quad n = \sum_{i=1}^{k} F_{c_i}.$$

6. Que renvoie la fonction suivante ?

```python
def Zeckendorf(n):
    i=0
    L=[fibo(i)]
    while L[-1]<=n:
        i=i+1
        L.append(fibo(i))
    k=n
    T=[]
    while k>0:
        f=recherche(k,L)
        T.append(f)
        k=k-f
    return T
```

7. En quoi l'algorithme précédent est-il un algorithme glouton ?