# CORRIGÉ
# DU SUJET ZÉRO

# MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES
# VOIE ECG

## CONCOURS ECRICOME PRÉPA 2023

# Sujet zéro - Mathématiques appliquées - Corrigé

## Exercice 1

1. La matrice $A - 6I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 3 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ est $\boxed{\text{de rang } 2}$ puisque ses trois colonnes $C_1, C_2, C_3$ vérifient : $(C_1, C_2)$ liée ($C_1 + C_2 = 0$) et $(C_1, C_3)$ libre (non colinéaires).
   Ainsi, la matrice $A - 6I_3$ n'est pas inversible, ce qui signifie que $\boxed{6 \text{ est une valeur propre de } A.}$
   De plus, comme $\text{rg}(A - 6I_3) = 2$, on en déduit par le théorème du rang que l'espace propre de $A$ associée à la valeur propre 6 est de dimension 1 : $\boxed{\dim(E_6(A)) = 1}$

2. Calculons déjà $U$ :

$$U = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   On calcule alors $AU$ :

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   Ainsi, $U$ est un vecteur non nul, vérifiant $AU = 2U$ : $\boxed{U \text{ est donc bien un vecteur propre de } A\text{, et la valeur propre associée est } 2.}$

   Il est attendu des candidats qu'ils mentionnent $U \neq 0$ pour vérifier la bonne connaissance de la définition d'un vecteur propre.

3. (a) Montrons que $\mathscr{B} = (U, V, W)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   Comme $Card(\mathscr{B}) = 3 = \dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$, il suffit de vérifier que la famille $\mathscr{B}$ est libre.
   Soient $a, b, c$ trois réels tels que :
$$aU + bV + cW = 0.$$
   Par identification des coefficients, on a alors :
$$\begin{cases} 2a + 2b + c = 0 \\ 2a + c = 0 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} b = 0 \\ 2a + c = 0 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \implies a = b = c = 0$$
   Ainsi, $\boxed{\text{la famille } \mathscr{B} = (U, V, W) \text{ est bien une base de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$

   Les candidats doivent maîtriser le vocabulaire. En particulier, le cardinal et la dimension ne doivent pas être confondus.

   (b) On sait déjà que $f(V) = AV = U + 2V$ d'après la définition du vecteur $U$.
   On sait déjà de plus que $f(U) = 2U$ puisque $U$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 2.
   On calcule enfin $f(W) = AW$ :
$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
   Ainsi, $f(W) = 6W$.

$$\boxed{\text{La matrice de } f \text{ dans la base } \mathscr{B} \text{ est alors : } \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.}$$

(c) Comme $A$ et $B$ représentent le même endomorphisme dans des bases différentes, les matrices $A$ et $B$ sont alors semblables.

En notant $P$ la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$ : $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors $P$ est inversible et on a :

$$\boxed{\mathrm{A} = \mathrm{PBP}^{-1}}$$

4. La matrice $B$ est triangulaire, donc on lit son spectre sur sa diagonale : $Sp(B) = \{2, 6\}$.
Or, $B$ et $A$ sont semblables, donc ont les mêmes valeurs propres : $Sp(A) = Sp(B)$.
Comme 0 n'est pas valeur propre de $A$, $\boxed{\text{la matrice } A \text{ est donc inversible}}$.
La matrice $B - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ est clairement de rang 2, donc l'espace propre de $B$ (donc de $A$) pour la valeur propre 2 est de dimension 1.
Ainsi, $Sp(A) = \{2, 6\}$, mais $\dim(E_2(A)) + \dim(E_6(A)) = 2 < 3$, donc $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

## Partie 2

5. On peut remarquer que dans les cas où $x(0) = y(0)$, on conjecture que : $\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = y(t)$.
6. En effectuant le produit matriciel, on a bien :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad A\,X(t) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x(t) + y(t) - 4z(t) \\ 3x(t) + 3y(t) - 4z(t) \\ x(t) - y(t) + 2z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = X'(t).$$

Une justification sommaire (produit de matrice) peut être suffisante ici..

7. On note pout tout réel $t$ : $Y(t) = P^{-1}X(t)$. Alors :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ Y'(t) = P^{-1}X'(t) = P^{-1}AX(t) = P^{-1}(PBP^{-1})X(t) = BP^{-1}X(t) = BY(t)$$

8. (a) L'équation différentielle homogène $(\mathscr{E}_1)$ : $\varphi' - 6\varphi = 0$ a pour ensemble de solutions :

$$\boxed{\mathrm{S}_1 = \left\{t \mapsto a_1 e^{6t},\ a_1 \in \mathbb{R}\right\}}$$

Il n'est pas nécessaire d'écrire l'ensemble des solutions, mais il doit clairement apparaître qu'il y a une infinité de fonctions solutions. Il en va de mêm en 8.(b) et en 8.(c).

(b) L'équation différentielle homogène $(\mathscr{E}_2)$ : $\varphi' - 2\varphi = 0$ a pour ensemble de solutions :

$$\boxed{\mathrm{S}_2 = \left\{t \mapsto a_2 e^{2t},\ a_2 \in \mathbb{R}\right\}}$$

(c) Soit $c$ un réel.
Notons $\forall t \in \mathbb{R},\ \psi(t) = cte^{2t}$. La fonction $\psi$ est bien dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \psi'(t) = ce^{2t} + 2cte^{2t} = 2\psi(t) + ce^{2t}$$

Ainsi, $\psi$ vérifie l'équation différentielle $(\mathscr{E}_3)$.
Comme les solutions de l'équation différentielle homogène associée à $(\mathscr{E}_3)$ sont les solutions de $(\mathscr{E}_2)$, on en déduit que l'ensemble des solutions de $(\mathscr{E}_3)$ est :

$$\boxed{\mathrm{S}_3 = \left\{t \mapsto a_3 e^{2t} + cte^{2t},\ a_3 \in \mathbb{R}\right\}}$$

9. On note : pour tout réel $t$, $Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}$.
On a montré dans la question 7 que : $\forall t \in \mathbb{R},\ Y'(t) = BY(t)$. On a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ \beta'(t) \\ \gamma'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} \alpha'(t) &= 2\alpha(t) + \beta(t) \\ \beta'(t) &= 2\beta(t) \\ \gamma'(t) &= 6\gamma(t) \end{cases}$$

Ainsi, $\gamma$ est bien solution de $(\mathscr{E}_1)$ : on peut donc dire qu'il existe un $a_1 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ \gamma'(t) = a_1 e^{6t}$.
Ainsi, $\beta$ est bien solution de $(\mathscr{E}_2)$ : on peut donc dire qu'il existe un $a_2 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ \beta'(t) = a_2 e^{2t}$.
Alors, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \alpha'(t) = 2\alpha(t) + a_2 e^{2t}$$

Alors $\alpha$ est solution de $(\mathscr{E}_3)$ pour $c = a_2$.
On peut donc dire qu'il existe un $a_3 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, \alpha'(t) = a_3 e^{2t} + a_2 t e^{2t} = (a_2 t + a_3) e^{2t}$.
Finalement, il existe trois réels $a_1, a_2, a_3$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ Y(t) = \begin{pmatrix} (a_2 t + a_3) e^{2t} \\ a_2 e^{2t} \\ a_1 e^{6t} \end{pmatrix}$$

Cette question de synthèse sera bien rémunérée dans le barème, à condition qu'elle soit bien rédigée et que les appels aux questions précédentes soient bien établis.

10. Comme $\forall t \in \mathbb{R},\ Y(t) = P^{-1} X(t)$, on en déduit par équivalence que : $\forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = PY(t)$. On a alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (a_2 t + a_3) e^{2t} \\ a_2 e^{2t} \\ a_1 e^{6t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(a_2 t + a_2 + a_3) e^{2t} + a_1 e^{6t} \\ 2(a_2 t + a_3) e^{2t} + a_1 e^{6t} \\ (2(a_2 t + a_3) + a_2) e^{2t} \end{pmatrix}$$

En notant $\lambda_1 = a_2$, $\lambda_2 = a_3$ et $\lambda_3 = a_1$, on obtient bien que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x(t) &= 2(\lambda_1 t + \lambda_1 + \lambda_2) e^{2t} + \lambda_3 e^{6t} \\ y(t) &= 2(\lambda_1 t + \lambda_2) e^{2t} + \lambda_3 e^{6t} \\ z(t) &= (2\lambda_1 t + \lambda_1 + 2\lambda_2) e^{2t} \end{cases}$$

11. Avec les notations précédentes, on a :

$$\begin{cases} x_0 = x(0) = 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ y_0 = y(0) = 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ z_0 = z(0) = \lambda_1 + 2\lambda_2 \end{cases}$$

ce qui donne en inversant le système que :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{x_0 - y_0}{2} \\ \lambda_2 = \dfrac{-x_0 + y_0 + 2z_0}{2} \\ \lambda_3 = \dfrac{x_0 + y_0 - 2z_0}{2} \end{cases}$$

Ce qui donne alors que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x(t) &= \left((x_0 - y_0)t + z_0 + \dfrac{1}{2}(x_0 - y_0)\right) e^{2t} + \left(\dfrac{1}{2}(x_0 + y_0) - z_0\right) e^{6t} \\ y(t) &= \left((x_0 - y_0)t + z_0 + \dfrac{1}{2}(y_0 - x_0)\right) e^{2t} + \left(\dfrac{1}{2}(x_0 + y_0) - z_0\right) e^{6t} \\ z(t) &= \Big((x_0 - y_0)t + z_0\Big) e^{2t} \end{cases}$$

Les candidats qui démarrent correctement, mais qui obtiennent quelques erreurs de calculs peuvent obtenir des points de méthode à condition d'être honnête et de signaler leur erreur manifeste sur leur copie. Les candidats qui trafiquent leurs calculs erronés pour obtenir le résultat de l'énoncé seront sanctionnés.

12. En particulier, lorsque $x_0 = y_0$, on obtient que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x(t) &= z_0 e^{2t} + (x_0 - z_0) e^{6t} \\ y(t) &= z_0 e^{2t} + (x_0 - z_0) e^{6t} \\ z(t) &= z_0 e^{2t} \end{cases}$$

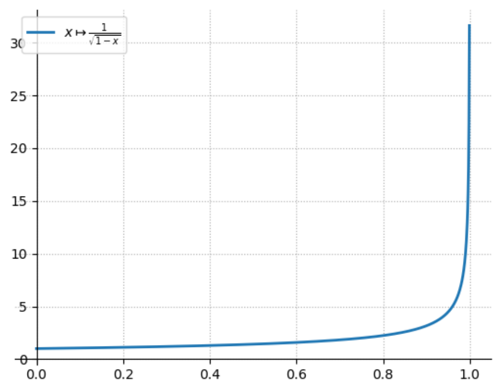
et en particulier on a bien : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = y(t).}$

# Exercice 2

## Partie 1

1. $f$ est l'inverse d'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1[$ qui ne s'annule pas sur $[0,1[$.

   Donc $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1[$.




2. (a) Soit $x \in ]0,1[$.

**Initialisation** Remarquons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x f^{(1)}(t)\frac{(x-t)^0}{0!}\mathrm{d}t = f(0) + \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t = f(0) + f(x) - f(0)$.

Donc pour $n=0$, $\displaystyle f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t$.

**Hérédité** Soit $n$ un entier naturel. Supposons que $\displaystyle f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t$.

Or les fonctions $f^{(n+1)}$ et $t \longmapsto \dfrac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,x]$.
Donc par intégration par parties,

$$\int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t = \left[f^{(n+1)}(t)\frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^x + \int_0^x \left(f^{(n+1)}\right)'(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{d}t$$

Or par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \left[f^{(n+1)}(t)\frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^x + \int_0^x f^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + f^{(n+1)}(0)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x f^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x f^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

**Conclusion** Donc par le principe de récurrence, $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t$.

Une rédaction correcte de la récurrence est un attendu, évalué dans le barème, même si l'hérédité n'est pas démontrée.

(b) **Initialisation** Par convention $f^{(0)} = f$. Et $\forall x \in [0,1[,\ \dfrac{(2.0)!}{2^{2.0}0!}(1-x)^{-0-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = f(x)$.

Donc pour $n = 0$, $\forall x \in [0,1[,\ f^{(0)}(x) = \dfrac{(2.0)!}{2^{2.0}0!}(1-x)^{-0-\frac{1}{2}}$.

**Hérédité** Soit $n$ un entier naturel. Supposons que $\forall x \in [0,1[,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}n!}(1-x)^{-n-\frac{1}{2}}$.

Alors en dérivant cette expression $\forall x \in [0,1[$,

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\left(-n-\tfrac{1}{2}\right)(-1)(1-x)^{-n-\frac{1}{2}-1} \\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\left(\frac{2n+1}{2}\right)(1-x)^{-(n+1)-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\left(\frac{(2n+1)(2n+2)}{2^2(n+1)}\right)(1-x)^{-(n+1)-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}(n+1)!}(1-x)^{-(n+1)-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

**Conclusion** Par le principe de récurrence, pour tout entier naturel $n$, $\forall x \in [0,1[,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}n!}(1-x)^{-n-\frac{1}{2}}$.

(c) Soit $n$ un entier naturel et soit $x$ un réel de $[0,1[$.
D'après les deux questions précédentes,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(2k)!}{2^{2k}k!}\frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}(n+1)!}(1-t)^{-(n+1)-\frac{1}{2}}\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{(2k)!}{k!(2k-k)!}\frac{x^k}{4^k} + \frac{(n+1)}{2^{2n+2}}\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(2n+2-n-1)!}\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k + \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[,\quad f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k + \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t$.

3. Soit $x$ un réel de $]0,1[$.

(a) Remarquons que $\forall t \in [0,x],\ \varphi_x(t) = 1 + \dfrac{x-1}{1-t}$.

Donc $\varphi_x$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,x]$ et $\forall t \in [0,x],\ \varphi_x'(t) = \dfrac{x-1}{(1-t)^2}$.

Or $x-1<0$. Donc $\forall t \in [0,x],\ \varphi_x'(t) < 0$.
Ainsi $\varphi_x$ est décroissante sur $[0,x]$.

Les candidats doivent mentionner que $\varphi_x$ est dérivable s'ils souhaitent utiliser sa dérivée.

(b) Soit $n$ un entier naturel.

Par la décroissance de $\varphi_x$ sur $[0,x]$, $\forall t \in [0,x],\ 0 \leqslant \dfrac{x-t}{1-t} \leqslant x$.

Et par croissance de la fonction $u \longmapsto u^n$, $\forall t \in [0,x],\ 0 \leqslant \left(\dfrac{x-t}{1-t}\right)^n \leqslant x^n$.

Or $\forall t \in [0,x],\ (1-t)^{-\frac{3}{2}} > 0$. Donc $\forall t \in [0,x],\ 0 \leqslant (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\dfrac{x-t}{1-t}\right)^n \leqslant (1-t)^{-\frac{3}{2}}x^n$.

Donc par croissance de l'intégrale, $0 \leqslant \displaystyle\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t \leqslant x^n \int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}t$.

Or $\displaystyle\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}t = \left[2(1-t)^{-\frac{1}{2}}\right]_0^x = 2\left((1-x)^{-\frac{1}{2}} - 1\right)$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \displaystyle\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t \leqslant 2x^n\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1\right)$.

(c) Rappelons que $\dfrac{n+1}{2^{2n+2}}\dbinom{2n+2}{n+1} = \dfrac{(2n+2)!}{n!(n+1)!}\dfrac{1}{2^{2n+2}}$.

Or $(2n+2)! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{4\pi(n+1)}\,(2n+2)^{2n+2}\mathrm{e}^{-(2n+2)}$ et $(n+1)! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi(n+1)}\,(n+1)^{n+1}\mathrm{e}^{-(n+1)}$.

Donc $\dfrac{(2n+2)!}{n!(n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{4\pi(n+1)}\,(2n+2)^{2n+2}\mathrm{e}^{-(2n+2)}}{\sqrt{2\pi\, n}\, n^n e^{-n}\sqrt{2\pi(n+1)}\,(n+1)^{n+1}e^{-(n+1)}}$.

$$\text{Or } \frac{\sqrt{4\pi(n+1)}\,(2n+2)^{2n+2}\mathrm{e}^{-(2n+2)}}{\sqrt{2\pi\, n}\, n^n e^{-n}\sqrt{2\pi(n+1)}\,(n+1)^{n+1}e^{-(n+1)}} = \sqrt{\frac{4\pi(n+1)}{4\pi^2 n(n+1)}}\,\frac{(2n+2)^{2n+2}}{n^n(n+1)^{n+1}}\,\frac{e^{-2n-2}}{e^{-n}e^{-n-1}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi\, n}}\,\frac{2^{2n+2}(n+1)^{n+1}}{n^n}\,e^{-1}$$
$$= \frac{2^{2n+2}}{\sqrt{\pi}}\,\frac{n+1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n e^{-1}$$

Or $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = exp\left(n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)$ et $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1$. Alors par continuité de l'exponentielle en 1, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e^1$.

Ainsi $\dfrac{(2n+2)!}{n!(n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2^{2n+2}}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n}$.

> Finalement $\dfrac{n+1}{2^{2n+2}}\dbinom{2n+2}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}$.

(d) D'après la question 3b, $0 \leqslant \dfrac{n+1}{2^{2n+2}}\dbinom{2n+2}{n+1}\displaystyle\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t \leqslant \dfrac{n+1}{2^{2n+2}}\dbinom{2n+2}{n+1}2x^n\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}-1\right)$.

D'après la question précédente, $\dfrac{n+1}{2^{2n+2}}\dbinom{2n+2}{n+1}2x^n\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}-1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}2x^n\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}-1\right)$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}2x^n\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}-1\right) = 0$ car $0 < x < 1$.

> Ainsi par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{2^{2n+2}}\dbinom{2n+2}{n+1}\displaystyle\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t = 0$.

4. Soit $x$ un réel de $]0,1[$.

D'après la question , $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[,\quad f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k + \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t$.

En faisant tendre $n$ vers $+\infty$ et d'après la question précédente, $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k$.

> Donc la la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k$ converge et $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k$.

## Partie 2

5. (a)

```
def simulY(p):
    if rd.random()<p:
        return 1
    return -1
```

La réalisation d'une fonction correcte simple est exigible, et sera bien rémunérée dans le barème.
Les candidats peuvent utiliser l'abréviation `rd` sans avoir à la définition au préalable.

(b)

```python
def marche(n,p):
    X=0
    for k in range (n):
        X+=simulY(p)
    return X
```

Là encore, cette question sera bien rémunérée dans le barème.

6. (a) Soit $n$ un entier naturel. $Z_n(\Omega) = \{0, 1\}$ et $\mathbb{P}(Z_n = 1) = \mathbb{P}(Y_n = 1) = p$.

   Donc $Z_n$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p$.

   (b) Comme les variables aléatoires $Y_0$, $Y_1$,..., $Y_{n-1}$ sont mutuellement indépendantes, alors les variables aléatoires $Z_0$, $Z_1$,..., $Z_{n-1}$ sont mutuellement indépendantes.

   Donc la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} Z_k$ suit une loi binomiale de paramètre $(n, p)$.

   (c) Procédons par récurrence sur $n$.

   **Initialisation** Par définition $X_1 = Y_1$ et $Z_1 = \dfrac{Y_1 + 1}{2}$. Donc $X_1 = 2Z_1 - 1$.

   **Hérédité** Soit $n$ un entier naturel non nul. Supposons que $X_n = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} Z_k \; - \; n$.

   Par définition $X_{n+1} = X_n + Y_n$. Or $Y_n = 2Z_n - 1$.

   Et par hypothèse de récurrence, $X_{n+1} = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} Z_k \; - \; n + 2Z_n - 1$.

   Donc $X_{n+1} = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{n} Z_k \; - \; (n+1)$

   **Conclusion** Ainsi par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^* : X_n = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} Z_k \; - \; n$.

7. Soit $n$ un entier naturel.

   ◇ $p_{2n+1} = \mathbb{P}\left(X_{2n+1} = 0) = \mathbb{P}(2\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} Z_k \; - \; (2n+1) = 0\right) = \mathbb{P}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} Z_k = n + \frac{1}{2}\right)$.

   Or la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} Z_k$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et $n + \dfrac{1}{2} \notin \mathbb{N}$.

   Donc $\mathbb{P}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} Z_k = n + \frac{1}{2}\right) = 0$. Ainsi $p_{2n+1} = 0$.

   ◇ $p_{2n} = \mathbb{P}\left(X_{2n} = 0) = \mathbb{P}(2\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} Z_k \; - \; 2n = 0\right) = \mathbb{P}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} Z_k = n\right)$.

   Or la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} Z_k$ suit une loi binomiale de paramètre $(2n, p)$.

   Donc $\mathbb{P}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} Z_k = n\right) = \dbinom{2n}{n} p^n (1-p)^n$. Ainsi $p_{2n} = \dbinom{2n}{n} p^n (1-p)^n$.

8. (a) La fonction $u \longmapsto u(1-u)$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et de dérivée $u \longmapsto 1-2u$.
Donc le tableau de variations de $u \longmapsto u(1-u)$ est le suivant:

| $u$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $u \longmapsto u(1-u)$ | $0$ $\nearrow$ | $\frac{1}{4}$ | $\searrow$ $0$ |

Donc $\forall p \in ]0,1[, p \neq \frac{1}{2},\ 0 < p(1-p) < \frac{1}{4}$.

(b) D'après la partie 1, en posant $\frac{x}{4} = p(1-p)$ (ce qui est possible car $0 < p(1-p) < \frac{1}{4}$), la série $\sum_{n\geqslant 0} \binom{2n}{n} (p(1-p))^n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} (p(1-p))^n = \frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)}}$.

Or $1-4p(1-p) = 1+4p^2-4p = (1-2p)^2$ Ainsi la série $\sum_{n\geqslant 0} p_{2n}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} p_{2n} = \frac{1}{|1-2p|}$

9. (a) $p_{2n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{1}{2^{2n}}$.
Or $(2n)! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{4\pi n}\,(2n)^{2n}e^{-2n}$.
Donc $\frac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n}\,(2n)^{2n}e^{-2n}}{2\pi n\, n^{2n}e^{-2n}}$.
Alors $p_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}\,2^{2n}}$.

Donc $p_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

(b) La série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge et $p_{2n} \geqslant 0$.

Donc par critère de comparaison $\sum_{n\geqslant 0} p_{2n}$ diverge.

Or $\forall n \in \mathbb{N}, p_{2n} \geqslant 0$.

Donc $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} p_{2n} = +\infty$.

Il est nécessaire que le caractère positif des suites soit mentionné pour appliquer le critère d'équivalence.

# Exercice 3

## Partie 1

1. (a) On introduit, pour tout entier $n$ naturel non nul, la proposition $\mathcal{H}_n$: « $F_n$ et $F_{n+1}$ sont strictement positifs ».
**Initialisation** $F_2 = F_1 + F_0 = 1$. Ainsi, $F_1$ et $F_2$ sont bien strictement positifs, i.e. $\mathcal{H}_1$ est vérifiée.
**Hérédité** Soit $n$ un entier naturel non nul. Supposons que $\mathcal{H}_n$ est vérifiée. Comme $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, par somme de deux entiers strictement positifs d'après l'hypothèse de récurrence, on peut conclure que $F_{n+2}$ est aussi strictement positif. Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est aussi vraie.
**Conclusion** Donc par le principe de récurrence, $\mathcal{H}_n$ est vérifiée pour tout $n$ naturel non nul.

Les candidats peuvent utiliser une récurrence double s'ils le souhaitent.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, $F_n > 0$.
Par conséquent : $F_{n+1} + F_n > F_{n+1}$, c'est-à-dire : $F_{n+2} > F_{n+1}$.
On peut donc conclure que $\boxed{\text{la suite est strictement croissante à partir du rang 2}}$ (car $n \geqslant 1$ et l'inégalité fait apparaître du $(n+1)$).

(c) On reconnaît dans l'expression de $(F_n)_{n\geqslant 0}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2, dont l'équation caractéristique est: $r^2 - r - 1 = 0$. Les solutions de cette dernière sont $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\varphi' = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. On sait donc que :

$$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}, F_n = \alpha\varphi^n + \beta\varphi'^n.$$

Les conditions initiales $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$ permettent d'écrire le système suivant:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \varphi\alpha + \varphi'\beta = 1. \end{cases}, \quad \text{soit} \quad \alpha = -\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

En conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).}$$

(d) Comme $4 < 5 < 9$, on a $2 < \sqrt{5} < 3$. Ainsi : $-1 < \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 < 1 < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Donc, parmi les deux suites géométriques qui apparaissent dans l'expression du terme général de $(F_n)$, la première diverge vers $+\infty$ et la seconde converge vers 0.
Par somme, $\boxed{(F_n)_{n\geqslant 0} \text{ diverge et } \lim_{n\to+\infty} F_n = +\infty.}$

2.
```
def fibo(n):
    u, v = 0, 1
    for i in range(1, n + 1):
        u, v = v, u + v
    return u
```

Cette question d'informatique sera bien rémunérée dans le barème.

3. On remarque tout d'abord qu'avec les conditions imposées sur la liste `L`, l'élément recherché existe nécessairement. Pour le trouver, on parcourt la liste avec une boucle « Tant que » et on s'arrête au premier élément strictement plus grand que `x`. L'élément recherché est alors celui qui le précède dans la liste.

```
def recherche(x, L):
    indice = 1
    while L[indice] <= x:
        indice = indice + 1
    return L[indice - 1]
```

Cette question d'informatique sera bien rémunérée dans le barème, relativement plus que les questions précédentes de Python.

## Partie 2

4. (a) La première décomposition n'est ici pas la bonne : en écrivant $6 = F_2 + F_3 + F_4$, on fait bien apparaître des termes de la suite $(F_n)$, mais ceux-ci sont consécutifs, ce que n'autorise pas la définition de la décomposition de Zeckendorf.
Dans la seconde décomposition, $6 = F_2 + F_5$, ce problème a disparu. C'est donc bien cette écriture qui donne la décomposition de Zeckendorf de 6.

On attend une justification rapide même maladroite.

(b) $35 = 1 + 34 = F_2 + F_9$.

(c) $130 = 2 + 5 + 34 + 89 = F_2 + F_5 + F_9 + F_{11}$.

Les décompositions peuvent être données sans justification.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Dans la question 1.(a), on a montré que la suite $(F_n)$ est strictement croissante et diverge vers $+\infty$. Elle est donc non majorée. Par conséquent, il existe un indice $J$ tel que $F_J \geqslant n + 1$.
De plus, comme $n$ est non nul, $n + 1$ est supérieur ou égal à 2. Donc l'indice $J$ ne peut pas être égal à zéro, à un ou à deux. Enfin, par croissance de la suite, l'inégalité reste vraie pour tout entier supérieur ou égal à $J$.
En conclusion : $\exists J > 2,\ \forall i \geqslant J,\ F_i \geqslant n + 1$.

On valorisera tout début correct de démarche.

(b) Par hypothèse, $n$ appartient à $\mathbb{N}^*$, donc $n \geqslant 1 = F_2$ ; donc 2 appartient à $A_n$.
Par ailleurs, d'après la question précédente, tous les indices $i$ supérieurs ou égaux à $J$ ne peuvent pas appartenir à $A_n$. Ainsi, $A_n \subset [\![1, J-1]\!]$. L'ensemble $A_n$ contient donc au plus $J - 1$ éléments.

(c) Remarquons tout d'abord que l'ensemble $A_n$ est non vide et fini, il admet un maximum que l'on note $j$.
Comme 2 appartient cet ensemble, il est nécessairement plus petit que le maximum, soit $j \geqslant 2$.
Par ailleurs, $j$ appartient à $A_n$, donc $F_j \leqslant n$ et $j + 1$ ne peut pas appartenir à $A_n$ (sinon, cela contredirait la maximalité de $j$) et donc $F_{j+1} > n$.

(d) On repart de la derniére inégalité :

$$n < F_{j+1} = F_{j-1} + F_j \quad \text{autrement dit} \quad n - F_j < F_{j-1}.$$

(e) On pose $k = k' + 1$ et on définit le $k$-uplet $(c_1, \ldots, c_k)$ par :

$$\forall i \in [\![1, k-1]\!],\ c_i = c'_i,$$
$$c_k = j.$$

On a alors : $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} F_{c_i} = \sum_{i=1}^{k'} F_{c_i} + F_{c_k} = (n - F_j) + F_j = n$.
On sait déjà que $c_1 = c'_1 \geqslant 2$ et que $\forall i \in [\![1, k'-1]\!], c_i + 1c'_i + 1 < c'_{i+1} = c_{i+1}$.
Il reste à voir si cette inégalité est vraie pour l'indice $k - 1 = k'$.
On sait d'après la question précédente que $n - F_n$ est strictement inférieur à $F_{j-1}$ ; ainsi, par positivité des termes sommés, $F_{j-1} > \displaystyle\sum_{i=1}^{k'} F_{c'_i} \geqslant F_{c'_{k'}}$ et par conséquent $j - 1 > c_{k'}$, ce qui donne bien l'inégalité souhaitée.

6. La fonction renvoie la décomposition de Zeckendorf d'un entier `n` passé en argument : en effet, on commence par construire la liste de tous les termes de la suite $(F_n)$ qui sont inférieurs ou égaux à `n`; plus le premier strictement supérieur. À partir de cette liste, après avoir initialisé la variable `k` à `n`, on recherche dans une boucle le plus grande valeur de la liste inférieure ou égale à `k` avant de lui retrancher (et la stockant préalablement). Cette boucle s'arrête lorsque `k` atteint la valeur nulle.

D'après les questions précédentes, on sait que c'est la bonne approche pour construire la décomposition de Zeckendorf d'un entier.

7. Cette stratégie de ne s'occuper à chaque instant que de la valeur connue de `k` (sans prendre en compte les valeurs déjà stockées ou du nombre d'étapes déjà effectuées) fait de cette fonction un algorithme glouton.