ecricome

SUJET ZÉRO

MATHÉMATIQUES APPROFONDIES
VOIE ECG

CONCOURS ECRICOME PRÉPA 2023

Mathématiques approfondies - Sujet zéro 1

Exercice 1

Soit E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique.
On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E.
On notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de E, et $\| \cdot \|$ la norme associée.
Pour tout sous-espace vectoriel F de E, on notera $F^\perp$ l'orthogonal de F pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Partie I

Dans cette partie, on note g l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer la matrice A^2, puis la matrice A^3.
   Déterminer un réel $\alpha > 0$ tel que : $A^3 = -\alpha^2 A$.
2. Démontrer que 0 est valeur propre de g, et déterminer un vecteur v_1 de norme 1 tel que (v_1) soit une base de l'espace propre de g associé à la valeur propre 0.
3. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de g.
4. L'endomorphisme g est-il bijectif ? Est-il diagonalisable ?
5. On pose $v_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$.
   Démontrer que $v_2 \in (E_0(g))^\perp$, puis déterminer un vecteur v_3 tel que la famille (v_2, v_3) soit une base orhonormale de $(E_0(g))^\perp$.
6. Démontrer que la famille $\mathscr{C} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base orthonormale de E, et déterminer la matrice représentative de g dans la base $\mathscr{C}$.

Partie II

1. Pour tout endomorphisme f de E, démontrer que les deux propriétés $(P1)$ et $(P2)$ ci-dessous sont équivalentes :

$$\begin{aligned} (P1) \quad &: \quad \forall x \in E, \quad \langle f(x), x \rangle = 0 \\ (P2) \quad &: \quad \forall (x, y) \in E^2, \quad \langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle. \end{aligned}$$

   Un endomorphisme vérifiant les propriétés $(P1)$ et $(P2)$ est dit **anti-symétrique**.
2. Démontrer que l'endomorphisme g défini dans la partie précédente est anti-symétrique.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère un endomorphisme f de E anti-symétrique.
L'objectif de cette partie est de démontrer qu'il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice représentative de f est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix},$$

où α est un réel.

3. On veut démontrer par l'absurde que f n'est pas bijective.
   On suppose donc que f est bijective.
   Soit x un vecteur non nul de E, et soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par x et $f(x)$.

   (a) Déterminer la dimension de F.
   (b) Démontrer qu'il existe un vecteur y non nul de E tel que la famille $(x, f(x), y)$ est orthogonale.
   (c) Démontrer alors que la famille $(x, f(x), y, f(y))$ est libre.
   (d) Conclure.

4. Démontrer qu'il existe trois vecteurs : e'_1, e'_2, et e'_3 de E tels que e'_1 appartient au noyau de f, et la famille $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base orthonormale de E.
5. (a) Démontrer que la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}$' est anti-symétrique.
   (b) Conclure quant à l'objectif annoncé au début de cette partie.

Exercice 2

Partie I : Étude des intégrales de Wallis

Pour tout entier naturel n, on pose : $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n \, \mathrm{d}t$.

1. Calculer W_0 et W_1.
2. Étudier les variations de la suite $(W_n)_{n \geqslant 0}$.
3. Démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n,$$
   puis que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1) W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2}.$$
4. Déduire des questions précédentes que $W_n \underset{n \to +\infty}{\sim} W_{n+1}$, puis que $W_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.
5. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{2n} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2}.$$

Partie II : Démonstration de la formule de Stirling

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = \dfrac{n!}{n^n} \cdot \dfrac{e^n}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$
2. (a) Rappeler le développement limité à l'ordre 3 de $\ln(1+u)$ au voisinage de 0.
   (b) En déduire que : $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\dfrac{1}{12n^2}$.
3. (a) Déterminer la nature de la série de terme général $(\ln u_{n+1} - \ln u_n)$.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers un réel ℓ.
4. À l'aide des résultats de la partie I, déterminer la valeur de ℓ.
5. Démontrer alors la formule de Stirling :
$$n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Partie III : Étude d'une suite d'intégrales

Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \left(te^{-t}\right)^n \mathrm{d}t$

1. (a) Dresser le tableau de variations de la fonction h définie sur $[0,1]$ par : $\forall t \in [0,1],\ h(t) = te^{-t}$.
   (b) En déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \left(\frac{1}{e}\right)^n.$$
   (c) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.
   Quelle est la nature de la série de terme général I_n ?
2. On considère une suite $(X_n)_{n \geqslant 1}$ de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1.

   Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

   (a) Quelle est la loi de S_n? En donner une densité.
   (b) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \frac{n!}{n^{n+1}} P\left(S_{n+1} \leqslant n\right).$$
   (c) On rappelle que dans la librairie `numpy.random` importée sous `rd`, se trouve les commandes suivantes :
   ⋆ `rd.random()` renvoie la simulation d'une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1[$.
   ⋆ `rd.exponential(a)` renvoie la simulation d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\texttt{a}}$.
   ⋆ `rd.normal(0,1)` renvoie la simulation d'une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.
   ⋆ `rd.gamma(a)` renvoie la simulation d'une variable aléatoire de loi gamma de paramètre a.

   Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous afin qu'elle prenne en argument une valeur de n entière, simule 10 000 fois la réalisation de la variable aléatoire S_{n+1} et renvoie une valeur approchée de $P\left(S_{n+1} \leqslant n\right)$:

```python
import numpy.random as rd
def proba(n):
    N=............
    c=0
    for i in range(N) :
        S=............
        if S<= n:
            c=............
    return ............
```

   (d) Écrire alors un programme qui demande à l'utilisateur une valeur de n, puis calcule et affiche sous forme de liste les valeurs estimées de $I_1, I_2, \ldots, I_n$.
   Ce programme pourra faire appel à la fonction Python de la question précédente.
3. Pour tout entier n non nul, on pose :
   - $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$,
   - $\overline{X}_n^*$ la variable aléatoire centrée réduite associée à $\overline{X}_n$,
   - $Y_n = \overline{X}_n^* + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

   (a) Justifier que la suite $(\overline{X}_n^*)_{n \geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire Z dont on précisera la loi.
   On **admet** que la suite $(Y_n)_{n \geqslant 1}$ converge alors également en loi vers la variable aléatoire Z.
   (b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P\left(S_{n+1} \leqslant n\right) = P\left(Y_{n+1} \leqslant 0\right)$.
   (c) En utilisant les questions précédentes, et la formule de Stirling rappelée dans la partie précédente, montrer alors que :
   $$I_n \underset{n \to +\infty}{\sim} e^{-n} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Exercice 3

Pour tous entiers naturels a et b non nuls, et pour tout entier naturel r, on considère l'expérience aléatoire ci-dessous.
Un urne contient initialement a boules blanches et b boules noires.
On effectue dans cette urne une infinité de tirages d'une boule, en procédant de la façon suivante : après chaque tirage, on remet la boule piochée dans l'urne et **on rajoute systématiquement r boules blanches** avant de procéder au tirage suivant.
On note dans tout le problème X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule noire si on obtient au moins une boule noire dans l'expérience, et qui prend la valeur 0 si on n'obtient jamais de boule noire.

Partie I

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement : « Lors des n premiers tirages, on n'obtient que des boules blanches. »

1. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(A_n) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a+kr}{a+b+kr}$.
2. Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -\ln\left(P(A_n)\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1+\frac{b}{a+kr}\right)$.
3. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \ln\left(1+\frac{b}{a+kr}\right)$, puis calculer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $P(A_n)$.
4. Démontrer alors soigneusement que $P(X=0)=0$.

Dans toute la suite du problème, on traduira ce résultat en supposant que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

5. Écrire une fonction Python qui prend en entrée les entiers a, b et r, simule les tirages dans l'urne jusqu'à l'obtention de la première boule noire et renvoie la valeur de X obtenue.
6. Écrire alors une fonction Python qui en prend en entrée les entiers a, b et r, et une valeur de N, qui simule N réalisations de la variable aléatoire X et renvoie la moyenne des résultats obtenus.
7. On suppose dans cette question que $r=0$.
   Donner la loi de X.
   Montrer que X admet une espérance et une variance, que l'on exprimera en fonction de a et b.
8. On suppose dans cette question que $a=b=r=1$.
   (a) Donner la loi de X.
   (b) Démontrer que X n'admet pas d'espérance.

Partie II : Étude du cas $r = 1$

Dans cette partie, on pose $r=1$ et on suppose que b est supérieur ou égal à 2.

1. On suppose de plus que $a=1$.
   (a) Démontrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X=n) = \frac{b\cdot b!}{n(n+1)\cdots(n+b)} = \frac{b\cdot(n-1)!\cdot b!}{(n+b)!}.$$
   (b) On note (v_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*\ v_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+b-1)} = \dfrac{n!}{(n+b-1)!}$.
   Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad nP(X=n) = \dfrac{b\cdot b!}{b-1}(v_n - v_{n+1})$.
   (c) En déduire que X admet une espérance, et que : $E(X) = \dfrac{b}{b-1}$.

On admettra que pour tout entier naturel a non nul, X admet une espérance.

2. Le réel a n'est plus supposé être égal à 1 mais seulement supérieur ou égal à 1.
   On notera alors **et uniquement dans cette question** X_a la variable aléatoire X.
   Soit B_1 l'événement : « On obtient une boule blanche au premier tirage ».
   (a) Montrer que : $\forall a \in \mathbb{N}^*,\ E(X_a|B_1) = 1 + E(X_{a+1})$.
   (b) Déterminer $E(X_a|\overline{B_1})$.
   (c) Démontrer que :
   $$\forall a \in \mathbb{N}^*,\ E(X_a) = 1 + \frac{a}{a+b}E(X_{a+1}),$$
   puis que :
   $$\forall a \in \mathbb{N}^*,\ E(X_a) = \frac{a+b-1}{b-1}.$$

Partie III

On revient au cas général où a, b et r sont des entiers naturels non nuls et on suppose cette fois que r est non nul.

On rappelle le résultat démontré dans la première partie :

$$\forall n \geqslant 1,\ -\ln(P(A_n)) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{b}{a+kr}\right).$$

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = -\ln(P(A_n)) - \dfrac{b}{r}\ln(n)$.

1. Démontrer que la série de terme général $(u_{n+1} - u_n)$ converge.
2. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ.
3. Démontrer que $P(A_n)$ est équivalent à $e^{-\ell} \cdot \dfrac{1}{n^{\frac{b}{r}}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Démontrer que $nP(X=n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{b}{r}P(A_{n-1})$.
5. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la variable aléatoire X admette une espérance.