Devoir surveillé n°5 - Concours blanc n°2 - Vendredi 14 mars 2025

Prière de respecter une **marge** suffisante, d'**encadrer** vos résultats,
et de **changer de copie** à chaque nouvel exercice,
en faisant apparaître **votre nom** sur **chaque** copie.

Dans tout le devoir, on suppose que les bibliothèques Python sont déjà importées avec leurs alias habituels :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt
```

Exercice 1 (d'après ECRICOME)

Pour tout entier naturel non nul, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ par : $$\forall x \geq 0,\ f_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,\mathrm{d}t$$

Partie A : Étude de la fonction f_n

Dans cette partie, on fixe un entier naturel n non nul.

1. Démontrer que la fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et : $\forall x \geq 0,\ f_n'(x) = \dfrac{x^{2n}-1}{x+1}$

2. Étudier les variations de f_n.

3. Démontrer que f_n est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, et calculer sa dérivée seconde.
En déduire que f_n est convexe sur $\mathbb{R}_+$.

4. **a.** Démontrer : $\forall t \geq 1,\ t^{2n}-1 \ \geq\ n(t^2-1)$.

b. Montrer alors : $\forall x \geq 1,\ f_n(x) \ \geq\ f_n(1) + \dfrac{n}{2}(x-1)^2$.

c. En déduire la limite de $f_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

5. Calculer $f_n(0)$, puis démontrer : $f_n(1) < 0$.

6. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive, et que cette solution est strictement supérieure à 1. On note x_n cette solution.

Partie B : Étude d'une suite implicite

On étudie dans cette partie le comportement de la suite (x_n), où pour tout entier naturel n non nul, x_n est l'unique solution strictement positive de l'équation : $f_n(x) = 0$.
On admettra : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n \geq \frac{2n+2}{2n+1}$

7. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Démontrer : $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad f_{n+1}(x) - f_n(x) \ =\ x^{2n+1}\left(\frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

8. **a.** Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \geq \frac{2n+2}{2n+1},\quad f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$.

b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad f_{n+1}(x_n) \geq 0$.

c. Montrer alors que la suite (x_n) est décroissante, puis qu'elle est convergente.

9. **a.** Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$: $-\ln(2) \leq f_n(1) \leq 0$.

b. À l'aide de l'inégalité démontrée à la question **4b** de la partie A, montrer alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq x_n - 1 \leq \sqrt{\dfrac{2\ln(2)}{n}}$
Quelle est la limite de x_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Partie C : Étude d'une fonction de deux variables

Dans cette partie, on fixe à nouveau un entier naturel n non nul.
L'objectif de cette partie est d'étudier la fonction G_n définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par :
$$G_n : (x,y) \mapsto f_n(x) \times f_n(y)$$

10. Justifier que la fonction G_n est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et calculer ses dérivées partielles premières.

11. Déterminer l'ensemble des points critiques de G_n.

12. Calculer la matrice hessienne de G_n au point (x_n, x_n) puis au point $(1,1)$.

13. La fonction G_n admet-elle un extremum local en (x_n, x_n) ? Si oui, donner la nature de cet extremum.

14. La fonction G_n admet-elle un extremum local en $(1,1)$? Si oui, donner la nature de cet extremum.

Exercice 2 (d'après ECRICOME)

Partie 1.

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.
   - **a.** Calculer $A^2 - 7A$.
   - **b.** En déduire que les seuls réels susceptibles d'être valeurs propres de A sont les réels 3 et 4.
   - **c.** Trouver toutes les valeurs propres de A, et pour chacune d'entre elles, donner une base du sous-espace propre associé.
   - **d.** La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
2. Soient $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base standard de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ est
$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   - **a.** Déterminer le noyau de f. En déduire une valeur propre de B et le sous-espace propre associé.
   - **b.** Déterminer le rang de la matrice $B - 2I_3$.
   - **c.** Calculer $f(e_1 - e_2 - e_3)$.
   - **d.** Déduire des questions précédentes que la matrice B est diagonalisable.
3. Trouver une matrice P satisfaisant toutes les conditions ci-dessous :
   - la matrice P est inversible ;
   - la matrice $D_2 = P^{-1}BP$ est égale à $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;
   - les coefficients situés sur la première ligne de P sont, de gauche à droite, 1, 1 et -1 ;
   - la matrice $D_1 = P^{-1}AP$ est également diagonale.

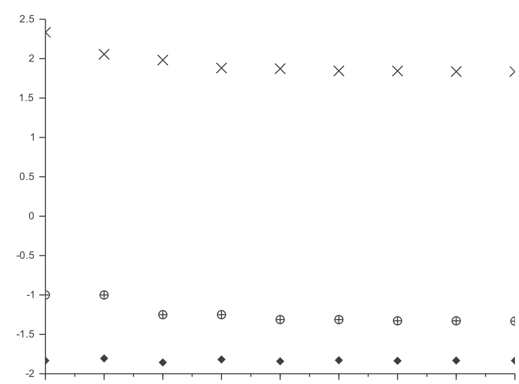
Partie 2.

On note $X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier positif n, $\quad X_{n+2} = \frac{1}{6} A X_{n+1} + \frac{1}{6} B X_n.$

On considère la suite matricielle $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_n = P^{-1} X_n.$

4. Établir que $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_{n+2} = \frac{1}{6} D_1 Y_{n+1} + \frac{1}{6} D_2 Y_n.$
5. Pour tout entier positif n, on note $Y_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.
   Déduire de la question précédente que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_{n+2} = \frac{1}{2} a_{n+1} + \frac{1}{2} a_n \\ b_{n+2} = \frac{1}{2} b_{n+1} \\ c_{n+2} = \frac{2}{3} c_{n+1} + \frac{1}{3} c_n. \end{cases}$
6. Montrer que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, puis calculer les matrices Y_0 et Y_1.
7. Pour tout entier positif n, calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.
8. En déduire une expression de X_n en fonction de n pour tout entier positif n.
   En notant $X_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$, on vérifiera notamment que $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \beta_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^n - \frac{4}{3}.$
9.
   - **a.** Compléter la fonction ci-dessous, qui prend en argument un entier n supérieur ou égal à 2 et qui renvoie la matrice X_n.
     On rappelle que le produit matriciel de deux matrices M et N est obtenu avec la commande `np.dot(M,N)`.
   - **b.** La fonction précédente a été utilisée dans un script permettant d'obtenir graphiquement les valeurs de α_n, β_n et γ_n en fonction de n, et le résultat obtenu est celui de la figure ci-dessous.
     En justifiant la réponse, associer chacune des trois représentations graphiques à l'une des suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

```python
def X(n):
    Xold = np.array([[3],[0],[-1]])
    Xnew = np.array([[3],[0],[-2]])
    A=np.array([[2,1,-2],[0,3,0],[1,-1,5]])
    B=np.array([[1,-1,-1],[-3,3,-3],[-1,1,1]])
    for i in range(2,n+1):
        Aux = ...
        Xold = ...
        Xnew = ...
    return ...
```



Exercice 3 (inspiré d'EML)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 8 & 16 & -4 \\ -8 & -16 & 4 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$.

1. **a.** Justifier que A est de rang 1.
   b. En déduire une valeur propre A ainsi qu'une base du sous-espace associé.
   c. Justifier que $V = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A.
   d. Justifier rigoureusement que A est diagonalisable et déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.
2. Résoudre le système différentiel (SH) $\begin{cases} x' = 8x + 16y - 4z \\ y' = -8x - 16y + 4z \\ z' = 4x + 8y - 2z \end{cases}$
3. Étude de quelques solutions de (SH) :
   a. Soient $X_1 : t \mapsto X_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix}$ et $X_2 : t \mapsto X_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$. On suppose que $X_1(0) = X_2(0)$. Que peut-on dire de X_1 et X_2 ?
   b. Déterminer les états d'équilibre de (SH).
   c. Faire l'étude de la convergence des trajectoires de (SH). Comment peut-on qualifier les états d'équilibres de (SH) ?
   d. Montrer que la solution $X : t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ du système (SH) vérifiant $X(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ est donnée sur $\mathbb{R}$ par : $X(t) = \begin{pmatrix} 2+2e^{-10t} \\ -2e^{-10t} \\ 4+e^{-10t} \end{pmatrix}$.
   e. Compléter le script Python suivant pour qu'il affiche cette solution pour des valeurs de t comprises entre -0,5 et 0,5 et matérialise la condition initiale par un point rouge :

```
T = np.linspace(___,___,___)
x = [ ___ for t in T]
y = [ ___ for t in T]
z = [ ___ for t in T]
fig = plt.figure()                # pour l'affichage en 3D
ax = fig.gca(projection='3d')     # pour l'affichage en 3D
ax.plot(x, y, z)                  # tracé de la courbe 3D
ax.plot(___,___,___,'or')         # point rouge matérialisant les conditions initiales
ax.set_xlabel('x')  # légende sur l'axe des abscisses
ax.set_ylabel('y')  # légende sur l'axe des ordonnées
ax.set_zlabel('z')  # légende sur l'axe des cotes
plt.show()
```

4. Dans cette question, on s'intéresse au système différentiel (S) $\begin{cases} x' = 8x + 16y - 4z \\ y' = -8x - 16y + 4z + 8e^{8t} \\ z' = 4x + 8y - 2z - 4e^{8t} \end{cases}$

   Une solution de (S) sur $\mathbb{R}$ est une application $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ où x, y et z sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telles que, pour tout t réel, on ait : $\begin{cases} x'(t) = 8x(t) + 16y(t) - 4z(t) \\ y'(t) = -8x(t) - 16y(t) + 4z(t) + 8e^{8t} \\ z'(t) = 4x(t) + 8y(t) - 2z(t) - 4e^{8t} \end{cases}$

   a. Précisez quel vecteur colonne $B(t) \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dépendant de la variable réelle t permet d'écrire le système (S) sous la forme :
   $$(S) \quad X' = AX + B(t)$$
   b. Soit Y une solution particulière de (S) sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que $X : t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ est solution de (S) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $Z : t \mapsto X(t) - Y(t)$ est solution de (SH) sur $\mathbb{R}$, (SH) désignant le système de la question 2.
   c. Démontrer que $Y : t \mapsto Y(t) = \begin{pmatrix} e^{8t} \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ est une solution de (S) sur $\mathbb{R}$.
   d. Donner maintenant les quatre premières lignes du script Python de la question **3d** pour qu'il affiche cette trajectoire particulière de (S) pour des valeurs de t comprises entre $-0,5$ et $0,5$.
   e. Quelle serait l'allure de cette trajectoire ?
   f. Donner toutes les solutions du système différentiel (S) sur $\mathbb{R}$.
   g. Existe-t-il des solutions de (S) qui soient convergentes ?

Exercice 4 (d'après EDHEC)

Partie 1

Pour tout couple (p,q) d'entiers naturels, on pose $I(p,q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q \, \mathrm{d}x$.

1. **a.** Expliquer rapidement pourquoi cette intégrale est bien définie.

b. Montrer, grâce à une intégration par parties, que l'on a : $\forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*,\ I(p,q) = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1)$

On admet que l'on peut en déduire par récurrence l'égalité :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q,0)$$

2. **a.** Pour tout couple (p,q) d'entiers naturels, déterminer $I(p+q,0)$ puis exprimer $I(p,q)$ en fonction de p et q.

b. Montrer enfin que : $\forall p \in \mathbb{N},\ \int_0^1 x^p (1-x)^p \, \mathrm{d}x = \frac{(p!)^2}{(2p+1)!}$.

Partie 2

Dans cette partie, on désigne par n un entier naturel quelconque et on pose $\alpha_n = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}$.

On considère la fonction b_n définie par : $b_n(x) = \begin{cases} \alpha_n x^n (1-x)^n & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0;1] \end{cases}$.

3. Montrer que b_n est une densité.

On considère désormais une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où X_n admet b_n comme densité.

4. Reconnaître la loi de X_0.

5. **a.** Utiliser la première partie pour montrer que X_n possède une espérance et que l'on a : $E(X_n) = \frac{1}{2}$

b. Toujours en utilisant la première partie, montrer que X_n possède une variance et exprimer $V(X_n)$ en fonction de n.

c. En déduire que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} P\left(\left|X_n - \tfrac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Partie 3

Dans cette partie, on désigne par n un entier naturel et on se propose d'étudier la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \alpha_n \int_0^x t^n (1-t)^n \, \mathrm{d}t, \qquad \text{où l'on a toujours } \alpha_n = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}$$

.

On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

6. Déterminer $f_0(x)$ pour tout réel x.

7. **a.** Donner la valeur de $f_n(1)$.

b. Montrer, grâce au changement de variable $u = 1-t$ dans l'intégrale définissant $f_n(x)$, que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) + f_n(1-x) = 1$$

c. En déduire la valeur de $f_n\left(\frac{1}{2}\right)$.

8. **a.** Montrer que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer, pour tout réel x, l'expression de $f_n'(x)$ en fonction de x et n.

b. Étudier, suivant la parité de n, le signe de $f_n'(x)$ pour tout réel x.

9. **a.** En utilisant éventuellement la formule du binôme de Newton, montrer que f_n est une fonction polynomiale puis en déduire les valeurs de $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$ et de $\lim_{x\to-\infty} f_n(x)$ selon que n est pair ou impair.

b. Dresser le tableau de variations de f_n (toujours en distinguant les cas n pair et n impair).

10. Dans cette question, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.

a. Pour tout réel x, déterminer $f_n''(x)$ en fonction de x et n.

b. En déduire que (C_n) possède un point d'inflexion si n est impair et trois si n est pair.

c. Tracer, selon la parité de n, l'allure de (C_n).