Devoir surveillé n°5 - Concours blanc n°2 - Corrigé

Dans tout le devoir, on suppose que les bibliothèques Python sont déjà importées avec leurs alias habituels :

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt
```

Exercice 1 (d'après ECRICOME)

Pour tout entier naturel non nul, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \geq 0,\ f_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,\mathrm{d}t$

Partie A : Étude de la fonction f_n

Dans cette partie, on fixe un entier naturel n non nul.

1. La fonction $g_n : t \mapsto \frac{t^{2n}-1}{t+1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ par opérations sur les fonctions usuelles $(t+1 \neq 0)$. Ainsi, d'après le théorème fondamental de l'analyse, f_n est la primitive de g_n qui s'annule en 0.
À ce titre, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $x \geq 0$, on a

$$f_n'(x) = \frac{x^{2n}-1}{x+1}.$$

2. $\forall x \in \mathbb{R}_+,\quad f_n'(x)$ est de même signe que son numérateur. Or, $\forall x \in \mathbb{R}_+$:

$$x^{2n}-1>0 \quad \Leftrightarrow \quad x^{2n}>1 \quad \Leftrightarrow \quad x>1$$

On en déduit que $\boxed{f_n \text{ strictement croissante sur } [1;+\infty[\text{ et strictement décroissante sur } [0,1].}$

3. f_n' est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ par opérations sur les fonctions usuelles $(t+1 \neq 0)$ et donc f_n est alors de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$. Pour $x \geq 0$, on a

$$f_n''(x) = \frac{2nx^{2n-1}(x+1)-(x^{2n}-1)}{(x+1)^2} = \frac{(2n-1)x^{2n}+2nx^{2n-1}+1}{(x+1)^2}.$$

Il est clair que, pour tout $x \geq 0$, $f_n''(x) \geq 0$ (le numerateur est combinaison linéaire à coefficients positifs de puissances de x, et le dénominateur est un carré).
Ainsi, $\boxed{f_n \text{ est convexe sur } \mathbb{R}_+.}$

4. **a.** On peut montrer ce résultat de plusieurs manières :

Première méthode : On pose φ la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $\varphi(t) = t^{2n}-1-n(t^2-1)$
φ est dérivable sur $[1;+\infty[$ (fonction polynôme) et $\forall t \in [1;+\infty[$,
$\varphi'(t) = 2nt^{2n-1}-2nt = 2nt\left(t^{2n-2}-1\right) \geq 0$ sur $[1,+\infty[$ Donc φ est croissante sur $[1,+\infty[$.
Son minimum est donc atteint en 1 et vaut $\varphi(1)=0$ donc $\forall t \in [1;+\infty[,\ \varphi(t) \geq 0$, ce qui justifie l'inégalité demandée

Deuxième méthode : Si $x>1$, observons que

$$\frac{x^n-1}{x-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k \geq \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$$

ce qui donne $x^n-1 \geq n(x-1)$ pour tout $x>1$. Cette inégalité s'étend naturellement à $x=1$ (les deux membres sont nuls). En l'appliquant à $x=t^2$ (si $t \geq 1$, on a bien $t^2 \geq 1$), on a l'inégalité voulue.

Troisième méthode : On aurait également pu penser à une démonstration par récurrence, qui est possible mais pour laquelle l'étape de l'hérédité est assez technique au niveau des calculs. C'est, comme dans la deuxième méthode l'égalité $x^n-1=(x-1)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k$ en posant $x=t^2$ qui permet de la mener à bien.

b. Comme $t^2-1=(t-1)(t+1)$, en divisant l'inégalité obtenue dans la question précédente par $t+1 \neq 0$, on obtient, pour tout $t \geq 1$,

$$\frac{t^{2n}-1}{t+1} \geq n(t-1) \qquad \text{et donc par positivité de l'intégrale } (1 \leq x) \qquad \int_1^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,\mathrm{d}t \geq \int_1^x n(t-1)\,\mathrm{d}t \qquad (**)$$

Soit $x \geq 1$. Par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \int_0^1 \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t + \int_1^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t \\ &\underset{(**)}{\geq} f_n(1) + n\int_1^x (t-1)\mathrm{d}t \\ &= f_n(1) + n\left[\frac{(t-1)^2}{2}\right]_1^x \\ &= f_n(1) + n\frac{(x-1)^2}{2}, \end{aligned}$$

ce qui est bien l'inégalité demandée.

c. Lorsque x tend vers $+\infty$, le membre de droite de l'inégalité précédente tend vers ∞. Par théorème de comparaison, on peut conclure que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty}$$

5. Comme $\boxed{f_n(0) = 0}$ et que f_n est strictement décroissante sur $[0;1]$, il suit que $f_n(1) < f_n(0) = 0$.

6. La fonction f_n est strictement décroissante sur $[0;1]$ et admet pour maximum 0 en 0. L'équation $f_n(x) = 0$ n'admet donc pas de solution sur $]0,1]$.

D'autre part,

- f_n est continue et strictement croissante sur $]1;+\infty[$
- $f_n(1) < 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$

donc f_n réalise une bijection de $]1;+\infty[$ vers $\left]f_n(1);+\infty\right[$

- Or $0 \in \left]f_n(1);+\infty\right[$

Donc l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $]1+\infty[$ et même sur $\mathbb{R}_+^*$. Cette solution, que l'on note x_n est donc strictement positive et même strictement supérieure à 1.

Partie B : Étude d'une suite implicite

On admettra que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n \geq \tfrac{2n+2}{2n+1}.$$

7. Soient $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) &= \int_0^x \frac{t^{2n+2}-1}{t+1}\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \frac{t^{2n+2}-t^{2n}}{t+1}\mathrm{d}t \qquad \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \int_0^x \frac{t^{2n}(t^2-1)}{t+1}\mathrm{d}t = \int_0^x t^{2n}(t-1)\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^{2n+2}}{2n+2} - \frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^x = \frac{x^{2n+2}}{2n+2} - \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\ &= x^{2n+1}\left(\frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1}\right), \end{aligned}$$

ce qui est bien l'égalité demandée.

8. **a.** Soit $x \geq \frac{2n+2}{2n+1}$, on remarque qu'en divisant cette inégalité par $2n+2 > 0$, il vient $\frac{x}{2n+2} \geq \frac{1}{2n+1}$.
Reprenons l'inégalité précédente :

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \underbrace{x^{2n+1}}_{\geq 0}\underbrace{\left(\frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1}\right)}_{\geq 0} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{f_{n+1}(x) - f_n(x) \geq 0}$$

b. On applique le résultat précédent à $x = x_n$ (ce qui est licite par l'hypothèse admise en début de partie). Ainsi,

$$f_{n+1}(x_n) - \underbrace{f_n(x_n)}_{=0} \geq 0 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \boxed{f_{n+1}(x_n) \geq 0}$$

c. Mais puisqu'on a également $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$, cela signifie que l'on vient de démontrer que $f_{n+1}(x_n) \geq f_{n+1}(x_{n+1})$. Or f_{n+1} est bijective et strictement croissante sur $[1;+\infty[$ et que x_n et x_{n+1} appartiennent à $[1;+\infty[$, on a :

$$f_{n+1}(x_n) \geq f_{n+1}(x_{n+1}) \quad \Rightarrow \quad x_n \geq x_{n+1}$$

Ce qui signifie que la suite $\boxed{(x_n) \text{ est décroissante.}}$
(x_n) étant également minorée par 1, le théorème de la limite monotone assure que $\boxed{(x_n) \text{ converge.}}$

9. **a.** On sait déjà que $f_n(1) \leq 0$ d'après la question 5.
Montrons que $f_n(1) \geq -\ln(2)$. Pour tout $t \in [0;1]$, $t^{2n} - 1 \geq -1$. Il suit (comme $t+1 \geq 0$) que

$$\frac{t^{2n}-1}{t+1} \geq \frac{-1}{t+1}$$

puis, par positivité de l'intégrale,

$$f_n(1) = \int_0^1 \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t \geq \int_0^1 \frac{(-1)}{t+1}\mathrm{d}t = -\Big[\ln|1+t|\Big]_0^1 \underset{1+t>0}{=} -\Big[\ln(1+t)\Big]_0^1 = -\ln(2), \qquad \text{donc} \qquad \boxed{f_n(1) \geq -\ln 2}$$

ce qui donne bien ce qu'on voulait.

b. On applique l'inégalité obtenue en **4b** à $x = x_n$ (toujours licite comme plus haut) :

$$\begin{aligned} f_n(x_n) \geq f_n(1) + \tfrac{n}{2}(x_n-1)^2 \quad &\Leftrightarrow \quad 0 \geq f_n(1) + \tfrac{n}{2}(x_n-1)^2 \\ &\underset{\text{q. préc.}}{\Rightarrow} \quad 0 \geq -\ln 2 + \tfrac{n}{2}(x_n-1)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \ln 2 \ \geq \ \tfrac{n}{2}(x_n-1)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{2\ln 2}{n} \ \geq \ (x_n-1)^2 \\ &\underset{x_n \geq 1}{\Leftrightarrow} \quad \boxed{\sqrt{\frac{2\ln 2}{n}} \ \geq \ x_n - 1 \geq 0} \end{aligned}$$

Le membre de gauche tend vers 0 par opérations sur les limites lorsque $n \to +\infty$. Par le théorème des gendarmes, on a $x_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui permet de conclure que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = 1}$$

Partie C : Étude d'une fonction de deux variables

On étudie la fonction G_n définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad G_n(x,y) = f_n(x) \times f_n(y).$$

10.
- Les fonctions $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$ sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ (car polynomiales), à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$,
- la fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Donc par composition, les fonctions $(x,y) \mapsto f_n(x)$ et $(x,y) \mapsto f_n(y)$ sont aussi $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$
Par produit c'est encore le cas de G_n.

On a alors, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$

$$\boxed{\partial_1 G_n(x,y) = f_n(y) \times f_n'(x)}$$

$$\boxed{\partial_2 G_n(x,y) = f_n(x) \times f_n'(y)}$$

11. On résout

$$(x,y) \text{ point critique de } G_n \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_1 G_n(x,y) = 0 \\ \partial_2 G_n(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_n(x)f_n'(y) = 0 \\ f_n(y)f_n'(x) = 0 \end{cases}$$

Or, sur $\mathbb{R}_+^*$, f_n ne s'annule qu'en x_n et f_n' ne s'annule qu'en 1. Ainsi, puisque $x_n \neq 1$,

$$\begin{cases} f_n(x)f_n'(y) = 0 \\ f_n(y)f_n'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_n(x) = 0 \\ f_n(y) = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} f_n'(y) = 0 \\ f_n'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_n \\ y = x_n \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{G_n \text{ admet deux points critiques : } (x_n, x_n) \text{ et } (1,1).}$

12. On commence par calculer les dérivées partielles d'ordre 2.

$$\partial^2_{1,1} G_n(x,y) = f_n(y)f_n''(x)$$

$$\partial^2_{1,2} G_n(x,y) = \partial^2_{2,1} G_n(x,y) = f_n'(x)f_n'(y) = \frac{x^{2n}-1}{x+1} \times \frac{y^{2n}-1}{y+1}$$

$$\partial^2_{2,2} G_n(x,y) = f_n(x)f_n''(y)$$

On forme alors les matrices hessiennes (on rappelle que $f_n(x_n) = 0$ et que $f_n'(1) = 0$). De plus, observant que

$$f_n'(x_n)^2 = \left(\frac{x_n^{2n}-1}{x_n+1}\right)^2,$$

et

$$f_n''(1) = n$$

on peut écrire

$$\boxed{\nabla^2 G_n(x_n, x_n) = \left(\frac{x_n^{2n}-1}{x_n+1}\right)^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

et

$$\boxed{\nabla^2 G_n(1,1) = n f_n(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

13. Les valeurs propres de $\nabla^2 G_n(x_n, x_n)$ sont de même signe que celle de la matrice $M = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
Or $\lambda \in \text{Sp}M \Leftrightarrow M - \lambda I$ est non inversible $\Leftrightarrow \det(M - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (-\lambda)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$
Les deux valeurs propres sont de signes opposés ; G_n présente un point selle en (x_n, x_n) et donc
$\boxed{G_n \text{ n'admet pas d'extremum local en } (x_n, x_n).}$

14. Sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, en le point critique $(1,1)$, la hessienne est déjà diagonale, ses valeurs propres (qui sont ses coefficients diagonaux) sont strictement négatives (car $n f_n(1) < 0$ car $f_n(1) < 0$). Ainsi, $\boxed{G_n \text{ présente un maximum local en } (1,1).}$
(et ce maximum vaut $G_n(1,1) = f_n(1)^2$)

Exercice 2 (d'après ECRICOME)

1. **a.** $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -14 \\ 0 & 9 & 0 \\ 7 & -7 & 23 \end{pmatrix}$ et on obtient $\boxed{A^2 - 7A = -12I.}$

b. Le polynôme $x^2 - 7x + 12$ est donc un polynôme annulateur de A. On trouve facilement ses racines qui sont 3 et 4.

$$\boxed{\text{Sp}(A) \subset \{3, 4\}.}$$

c. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On pose $E_3(A) = \left\{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}), AX = 3X\right\}$ et $E_4(A) = \left\{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}), AX = 4X\right\}$.

- Étude de $E_3(A)$:
  (facultatif : on aura vérifié au brouillon que puisque $A - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est non inversible (avec une ligne nulle) on sait que 3 est bien une valeur propre et que ce n'est pas de la perte de temps que de résoudre le système linéaire suivant, qui aura forcément une solution non triviale (et puisque $A - 3I$ est manifestement de rang 1 car les lignes non nulles sont colinéaires), on sait même que $E_3(A)$ sera de dimension 3-1=2 d'après le théorème du rang version matricielle)

$$\begin{aligned} X \in E_3(A) \quad &\Leftrightarrow \quad (A - 3I)X = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + y - 2z = 0 \\ \quad 0 \quad\quad = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad x = y - 2z \\ &\Leftrightarrow \quad X = \begin{pmatrix} y - 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad X = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  d'où l'on déduit que 3 est effectivement valeur propre de A, et que

$$E_3(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

  or la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, génératrice de $E_3(A)$, est également libre (car constituée de deux vecteurs non colinéaires), on en déduit qu'

$$\boxed{\text{une base de } E_3(A) \text{ est } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).}$$

- $\lambda = 4$: *(de même)*

$$\begin{aligned} X \in E_4(A) \quad &\Leftrightarrow \quad (A - 4I)X = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2x + y - 2z = 0 \\ \quad\quad y \quad\quad = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad X = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad X = z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  d'où l'on déduit que 4 est effectivement valeur propre de A, et que

$$E_4(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

  La famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, génératrice de $E_4(A)$, est également libre (car constituée d'un unique vecteur non nul), on en déduit qu'

$$\boxed{\text{une base de } E_4(A) \text{ est } \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).}$$

d. Comme les valeurs propres de A sont non nulles, A est $\boxed{\text{inversible}}$.
De plus, la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est libre (comme concaténée de bases de sous-espaces propres relatifs à des valeurs propres disctinctes) et de cardinal 3, dans l'espace $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension 3. Cette famille de vecteurs propres de A constitue donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et par suite $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$.

2. **a.** Pour trouver le noyau de f, on cherche les vecteurs v de $\mathbb{R}^3$ qui vérifient $f(v) = 0$. On pose $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
Cela revient à résoudre le système $BX = 0$, d'inconnue $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$
Or

$$BX = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - y - z = 0 \\ -3x + 3y - 3z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow 3L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 + L2}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 6z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

d'où l'on déduit que

$$\boxed{\text{Ker}(f) = \text{Vect}\big((1, 1, 0)\big).}$$

Comme par ailleurs c'est la même résolution qui permet de déterminer le sous-espace propre $E_0(B)$, on en déduit que $\boxed{0 \text{ est valeur propre de } B}$ et que le sous-espace propre associé est également $\boxed{E_0(B) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)}$.

b. La matrice $B - 2I_3$ s'écrit

$$B - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les première et dernière colonnes de cette matrice sont égales, mais elles ne sont pas proportionnelles à la deuxième colonne.
On en déduit que

$$\boxed{\text{rg}(B - 2I_3) = 2.}$$

c. Il est plus facile pour ce calcul d'utiliser le calcul matriciel :

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(e_1 - e_2 - e_3)) &= \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}}(e_1 - e_2 - e_3) \\ &= B \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}3\\-3\\-3\end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où : $\boxed{f(e_1 - e_2 - e_3) = 3 \cdot (e_1 - e_2 - e_3).}$

d.
- le rang de $(B - 2I_3)$ est différent de son ordre, donc $B - 2I_3$ n'est pas inversible, et donc 2 est valeur propre de B.
- Du fait que $B \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-3\\-3\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ 3 est valeur propre de B.

Les réels 0, 2 et 3 sont donc valeurs propres de B ; comme B est une matrice d'ordre 3 et qu'elle admet trois valeurs propres distinctes, on en déduit que $\boxed{B \text{ est diagonalisable.}}$

3. Il s'agit de trouver une base de vecteurs propres communs à A et à B.
Remarquons tout d'abord que les sous-espaces propres de B sont tous de dimension 1 en raisonnant par l'absurde.
On sait que les dimensions de sous-espaces propres sont supérieurs ou égaux à 1.
Supposons que l'un de ces sous-espace vectoriel ait une dimension strictement supérieure à 1. En concaténant les bases des trois sous-espaces vectoriels obtenus, on obtient donc une famille libre de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de plus de 4 vecteurs, ce qui est impossible puisque c'est une espace de dimension 3.

On va ensuite sélectionner un vecteur non nul pour chaque valeur propre de B, en faisant bien attention à l'ordre dans lequel on doit considérer les valeurs propres (on observe pour cela la diagonale de D)

- l'énoncé propose le vecteur $\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ comme élément de $E_3(B)$;
- on a déterminé que $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ engendrait $E_0(B)$;
- Comme les première et dernière colonnes de $B - 2I_3$ sont égales, le vecteur $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ est un élément de $E_2(B)$

La seule matrice P satisfaisant simultanément les trois premières conditions est donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observons maintenant que les colonnes de P sont également des vecteurs propres de A :

- La troisième colonne de P est dans $E_4(A)$
- La deuxième colonne de P correspond à l'un des deux vecteurs de la base de $E_3(A)$ trouvée en question **1c**.
- Enfin, on constate que la première colonne de A est également dans $E_3(A)$, puisque $A\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-3\\-3\end{pmatrix}$.
  (on aurait aussi pu remarquer que $\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right)=E_3(A)$)

La quatrième et dernière condition est donc elle aussi remplie, avec

$$D_1=\mathrm{diag}(3,3,4).$$

4. Distribuons P^{-1} à gauche de la relation définissant X_{n+2} :

$$\begin{aligned}Y_{n+2}&=P^{-1}X_{n+2}\\&=P^{-1}\cdot(\tfrac{1}{6}AX_{n+1}+\tfrac{1}{6}BX_n)\\&=\tfrac{1}{6}P^{-1}AX_{n+1}+\tfrac{1}{6}P^{-1}BX_n\end{aligned}$$

Donc, en se servant des relations $P^{-1}B=D_2P^{-1}$ et $P^{-1}A=D_1P^{-1}$, obtenues en multipliant les relations de la question 3 à droite par P^{-1}, on obtient comme demandé :

$$\begin{aligned}Y_{n+2}&=\tfrac{1}{6}D_1P^{-1}X_{n+1}+\tfrac{1}{6}D_2P^{-1}X_n\\&=\tfrac{1}{6}D_1Y_{n+1}+\tfrac{1}{6}D_2Y_n\end{aligned}$$

5. On a vu que $D_1=\mathrm{diag}(3,3,4)$ et que $D_2=\mathrm{diag}(3,0,2)$. Dès lors,

$$\begin{aligned}Y_{n+2}&=\tfrac{1}{6}\mathrm{diag}(3,3,4)\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\\c_{n+1}\end{pmatrix}+\tfrac{1}{6}\mathrm{diag}(3,0,2)\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix}\\&=\tfrac{1}{6}\begin{pmatrix}3a_{n+1}\\3b_{n+1}\\4c_{n+1}\end{pmatrix}+\tfrac{1}{6}\begin{pmatrix}3a_n\\0\\2c_n\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}a_{n+1}\\\frac{1}{2}b_{n+1}\\\frac{2}{3}c_{n+1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}a_n\\0\\\frac{1}{3}c_n\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}a_{n+1}+\frac{1}{2}a_n\\\frac{1}{2}b_{n+1}\\\frac{2}{3}c_{n+1}+\frac{1}{3}c_n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

d'où les trois relations demandées.

6. *(On pourrait procéder par la méthode du pivot, mais il est plus efficace de calculer le produit de P par la matrice proposée et de constater qu'il vaut I_3, puisque l'énoncé nous offre l'expression de la matrice inverse.)* Le calcul de $P\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&0&1\\1&-1&2\end{pmatrix}$ donne I. Donc $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&0&1\\1&-1&2\end{pmatrix}$.
Vu les valeurs de X_0 et X_1, on obtient

$$Y_0=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&0&1\\1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\qquad\text{et}\qquad Y_1=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&0&1\\1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

7. D'après les question 5 et 6, on a obtenu les relations suivantes : $\begin{cases}a_0=2, & a_1=1, & a_{n+2}=\frac{1}{2}a_{n+1}+\frac{1}{2}a_n\\ b_0=2, & b_1=1, & b_{n+2}=\frac{1}{2}b_{n+1}\\ c_0=1, & c_1=-1, & c_{n+2}=\frac{2}{3}c_{n+1}+\frac{1}{3}c_n\end{cases}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

- La suite (a_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $c^2-\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}=0$ admettant pour solutions 1 et $-\frac{1}{2}$. On en déduit que a_n est de la forme

  $$a_n=\lambda\cdot 1^n+\mu\cdot(-\tfrac{1}{2})^n$$

  où λ et μ doivent satisfaire le système linéaire

  $$\begin{cases}\lambda+\mu=a_0=2\\ \lambda-\frac{1}{2}\mu=a_1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda+\mu=2\\ -\frac{3}{2}\mu=-1\end{cases}\Leftrightarrow(\lambda,\mu)=\left(\tfrac{4}{3},\tfrac{2}{3}\right)$$

  d'où

  $$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad a_n=\tfrac{4}{3}+\tfrac{2}{3}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n}$$

- La suite (b_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, avec $b_0 = 2$, d'où

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = 2^{1-n}}$$

- La suite (c_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $c^2 = \frac{2}{3}c + \frac{1}{3}$ admettant pour solutions 1 et $-\frac{1}{3}$. On en déduit que c_n est de la forme

$$c_n = \lambda \cdot 1^n + \mu \cdot (-\tfrac{1}{3})^n$$

où λ et μ doivent satisfaire le système linéaire

$$\begin{cases} \lambda + \mu = c_0 = 1 \\ \lambda - \frac{1}{3}\mu = c_1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ -\frac{4}{3}\mu = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \mu = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (\lambda, \mu) = \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}\right)$$

d'où

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2} \cdot \left(-\tfrac{1}{3}\right)^n.}$$

8. Finalement,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = P \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{-1}{2} + \frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}}$$

la capacité à multiplier une matrice et un vecteur n'étant plus à démontrer à ce niveau de l'exercice, on se contente de donner

$$\beta_n = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{-1}{2} + \frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix} = -\left(\tfrac{4}{3} + \tfrac{2}{3}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n\right) + \left(2\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\right) = -\tfrac{4}{3} - \tfrac{2}{3}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}$$ comme voulu.

9. **a.** Ici, il s'agit de transcrire en Python la définition récursive de X_n.
Le vecteur `Xold` représente X_n, et le vecteur `Xnew`, X_{n+1}. On complète donc le code de la façon suivante :

```python
import numpy as np

def X(n):
    Xold = np.array([[3],[0],[-1]])
    Xnew = np.array([[3],[0],[-2]])
    A=np.array([[2,1,-2],[0,3,0],[1,-1,5]])
    B=np.array([[1,-1,-1],[-3,3,-3],[-1,1,1]])
    for i in range(2,n+1):
        Aux = Xold                              # sauvegarde
        Xold = Xnew                             # avance d'un rang
        Xnew = 1/6*(np.dot(A,Xold)+np.dot(B*Aux)) # calcul du terme suivant
    return Xnew
```

Pour cette dernière ligne, on regarde ce qui se passe pour $n = 2$ par exemple, où un seul tour de boucle sera effectué ; la valeur la plus récente de `Xold` sera X_1, et la valeur la plus récente de `Xnew`, X_2 ; c'est donc bien `Xnew` qu'il faut renvoyer.

b. Lorsque n tend vers l'infini, on constate, puisque les trois nombres $-1/2$, $1/2$ et $-1/3$ sont dans l'intervalle $]-1;1[$ et que $\left(-1/2\right)^n$, $\left(1/2\right)^n$ et $\left(-1/3\right)^n$ sont toutes trois convergentes vers 0, que

$$Y_n \to \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et donc} \quad X_n \to P\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/6 \\ -4/3 \\ -11/6 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 2 \\ -1{,}33 \\ -2 \end{pmatrix}$$

d'où l'on conclut que les suites de points sont dans le même ordre que les coefficients de X_n, au sens où

- les croix représentent les α_n,
- les plus cerclées représentent les β_n,
- les losanges noirs représentent les γ_n.

Exercice 3 (inspiré d'EML)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 8 & 16 & -4 \\ -8 & -16 & 4 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$.

1. **a.** A possède trois colonnes proportionnelles entre elles et non nulles, elle est donc de rang 1.

   b. Son rang étant différent de son ordre, A n'est pas inversible et on en déduit donc que $\boxed{0 \text{ est valeur propre de } A.}$
   Notons $E_0(A)$ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 0.
   Soit $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} U \in E_0(A) &\Leftrightarrow AU = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 8a + 16b - 4c = 0 \\ -8a - 16b + 4c = 0 \\ 4a + 8b - 2c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow c = 2a + 4b \\ &\Leftrightarrow U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 2a+4b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   On en déduit que $E_0(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$

   La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$, génératrice de $E_0(A)$, est également libre (formée de deux vecteurs non colinéaires).

   Donc $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } E_0(A).}$

   c.
   - $AV = \begin{pmatrix} 8 & 16 & -4 \\ -8 & -16 & 4 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 20 \\ -10 \end{pmatrix} = -10 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -10V$.
   - De plus, V n'est pas un vecteur nul.

   Donc $\boxed{V \text{ est un vecteur propre de } A \text{ associé à la valeur propre -10.}}$

   d.
   - En concaténant la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$ avec V, deux familles libres formées de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, on obtient une famille libre.
   - Cette famille constituée de 3 vecteurs propres de A dans l'espace vectoriel $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de dimension 3 forme donc une base de A.

   On en déduit que A est diagonalisable.

   La formule de changement de base permet de dire que $A = PDP^{-1}$ en posant $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}.}$

2. Le système différentiel (SH) s'écrit $X' = AX$ sous forme matricielle en posant $X : t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

   A étant diagonalisable, on sait que la solution générale de (SH) est alors : $\boxed{t \mapsto \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-10t} \quad \text{avec } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3}$

3. Étude de quelques solutions de (SH) :

   a. X_1 et X_2 satisfaisant au même problème de Cauchy, on en déduit qu' $\boxed{\text{elles sont égales}}$, puisqu'il y a unicité de la solution d'un problème de Cauchy donné.

   b. Les états d'équilibre correspondent aux solutions constantes de (SH). On les obtient en résolvant $AX = 0$.
   Ce système a déjà été résolu quand on a cherché les valeurs propres de A associées à la valeur propre 0 en question **1b**.
   On en déduit que $\boxed{\text{les états d'équilibre sont les trajectoires } (\alpha, \beta, 2\alpha + 4\beta) \text{ avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.}$

   c. A étant diagonalisable et ses valeurs propres étant négatives, on en déduit que toutes les trajectoires de (SH) sont convergentes. $\boxed{\text{Les états d'équilibres obtenus en question précédente sont donc des états d'équilibres stables.}}$

   d. On demande cette fois de résoudre un problème de Cauchy. D'après la réponse de la question 2, il s'agit de résoudre le système suivant :

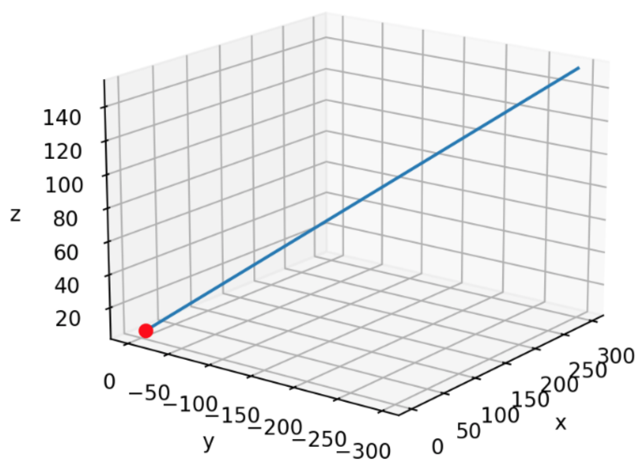
$$\begin{cases} \alpha + 2\gamma = 4 \\ \beta - 2\gamma = -2 \\ 2\alpha + \beta + \gamma = 5 \end{cases} \underset{\text{par substitution}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \alpha = 4 - 2\gamma \\ \beta = 2\gamma - 2 \\ 8 - 4\gamma + 2\gamma - 2 + \gamma = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 1 \end{cases}$$

En remplaçant les valeurs trouvées dans l'expression obtenue en question 2, on obtient bien le résultat voulu :
$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = 2\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} e^{-10t} = \begin{pmatrix}2+2e^{-10t}\\-2e^{-10t}\\4+e^{-10t}\end{pmatrix}$.

e. Voici le script complété :

```
T = np.linspace(-0.5,0.5,100)
x = [2+2*np.exp(-10*t) for t in T]
y = [-2*np.exp(-10*t) for t in T]
z = [4+np.exp(-10*t) for t in T]
fig = plt.figure()              # pour l'affichage en 3D
ax = fig.gca(projection='3d')   # pour l'affichage en 3D
ax.plot(x, y, z)                # tracé de la courbe 3D
ax.plot(4,-2,5,'or')        # point rouge matérialisant les conditions initiales
ax.set_xlabel('x')  # légende sur l'axe des abscisses
ax.set_ylabel('y')  # légende sur l'axe des ordonnées
ax.set_zlabel('z')  # légende sur l'axe des cotes
plt.show()
```

Remarque intéressante pour aller plus loin :
en exécutant ce script, on obtient la représentation graphique suivante :



On remarque que la trajectoire a l'air rectiligne et on aimerait comprendre pourquoi en observant les coordonnées de ses composantes :
Plaçons nous dans un repère orthonormé $\left(O\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$. En appelant M le point mobile de coordonnées $\left(x(t), y(t), z(t)\right)$ et $A(2,0,4)$, on remarque que M appartient à la trajectoire étudiée si et seulement si :

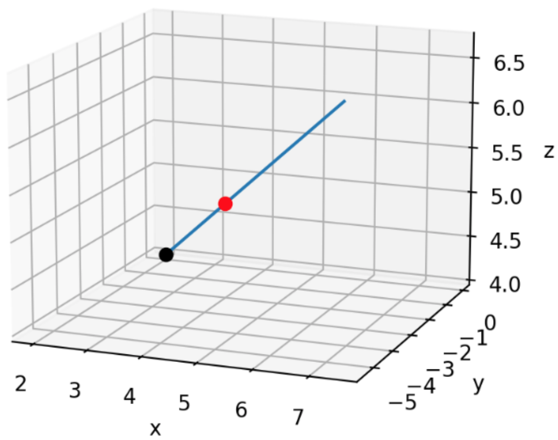
$$\begin{cases} x(t) = 2+2e^{-10t} \\ y(t) = -2e^{-10t} \\ z(t) = 4+e^{-10t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t)-2 = 2e^{-10t} \\ y(t) \quad = -2e^{-10t} \\ z(t)-4 = e^{-10t} \end{cases} \underset{\text{posons } \lambda = e^{-10t}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x(t)-2 = 2\lambda \\ y(t) \quad = -2\lambda \\ z(t)-4 = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u}$$

en posant $\vec{u} = (2,-2,1)$. On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires et donc que M appartient à la droite passant par A et dirigée par le vecteur $\vec{u}$.
Mieux, puisque le coefficient λ est un nombre parcourant $\mathbb{R}_+^*$ tout entier lorsque $t \in \mathbb{R}$, (la fonction $t \mapsto e^{-10t}$ réalisant une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$), on en déduit que la trajectoire est la demi droite ouverte $\left]A, \vec{u}\right)$. On peut réadapter la plage de calcul de la variable t et afficher le point A sur un nouvel affichage python (on en profite pour proposer un autre code possible) :

```
t = np.linspace(-0.1,0.5,100)
x = 2+2*np.exp(-10*t)
y = -2*np.exp(-10*t)
z = 4+np.exp(-10*t)
fig = plt.figure()              # pour l'affichage en 3D
ax = fig.gca(projection='3d')   # pour l'affichage en 3D
```

```
ax.plot(x, y, z)                    # tracé de la courbe 3D
ax.plot(4,-2,5,'or') # point rouge matérialisant les cond initiales
ax.plot(2,0,4,'ok')  # point noir matérialisant l'origine A de la droite
ax.set_xlabel('x')  # légende sur l'axe des abscisses
ax.set_ylabel('y')  # légende sur l'axe des ordonnées
ax.set_zlabel('z')  # légende sur l'axe des cotes
plt.show()
```

et ainsi visualiser ce que l'on vient de démontrer :



4. Dans cette question, on s'intéresse au système différentiel $(S)\quad\begin{cases} x' = 8x + 16y - 4z + 4e^{-2t} \\ y' = -8x - 16y + 4z - 4e^{-2t} \\ z' = 4x + 8y - 2z \end{cases}$

Une solution de (S) sur $\mathbb{R}$ est une application $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ où x, y et z sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telles que, pour tout t réel, on ait : $\begin{cases} x'(t) = 8x(t) + 16y(t) - 4z(t) + 4e^{-2t} \\ y'(t) = -8x(t) - 16y(t) + 4z(t) - 4e^{-2t} \\ z'(t) = 4x(t) + 8y(t) - 2z(t) \end{cases}$

a. La colonne $\boxed{B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 8e^{8t} \\ -4e^{8t} \end{pmatrix}}$ permet d'écrire (S) sous la forme $X' = AX + B(t)$

b. Y est une solution particulière de (S) sur $\mathbb{R}$, cela signifie que $Y' = AY + B(t)$ ou encore que $B(t) = Y' - AY$.

$$\begin{aligned} X \text{ est solution de } (S) \text{ sur } \mathbb{R} \quad &\Leftrightarrow \quad X' = AX + B(t) \\ &\Leftrightarrow \quad X' = AX + Y' - AY \qquad \text{d'après la relation trouvée ci-dessus} \\ &\Leftrightarrow \quad X' - Y' = AX - AY \\ &\Leftrightarrow \quad (X-Y)' = A(X-Y) \\ &\Leftrightarrow \quad X - Y \text{ est solution de } (SH) \text{ sur } \mathbb{R} \end{aligned}$$

c.
- D'une part : $\forall t \in \mathbb{R},\quad Y'(t) = \begin{pmatrix} 8e^{8t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- D'autre part : $\forall t \in \mathbb{R},\quad AY(t) = \begin{pmatrix} 8e^{8t} \\ -8e^{8t} \\ 4e^{8t} \end{pmatrix}$ donc $AY(t) + B(t) = \begin{pmatrix} 8e^{8t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc $\forall t \in \mathbb{R},\quad Y'(t) = AY(t) + B(t)$ ce qui signifie que Y est une solution de (S) sur $\mathbb{R}$.

d. Un script python permettant d'afficher cette trajectoire est donné par :

```
T = np.linspace(-0.5,0.5,100)
x = [np.exp(8*t) for t in T]
y = [1 for t in T]
z = [4 for t in T]
fig = plt.figure()                  # pour l'affichage en 3D
```

```
ax = fig.gca(projection='3d')     # pour l'affichage en 3D
ax.plot(x, y, z)                  # tracé de la courbe 3D
ax.set_xlabel('x')  # légende sur l'axe des abscisses
ax.set_ylabel('y')  # légende sur l'axe des ordonnées
ax.set_zlabel('z')  # légende sur l'axe des cotes
plt.show()
```

Autre réponse possible pour les quatre première lignes demandées (moins intuitive, mais juste également) :

```
t = np.linspace(-0.5,0.5,100)
x = np.exp(8*t)
y = np.ones(100)
z = 4*np.ones(100)
```

On en profite pour remarquer que la réponse

```
t = np.linspace(-0.5,0.5,100)
x = np.exp(8*t)
y = 1       # ATTENTION CE CODE EST FAUX
z = 4       # ATTENTION CE CODE EST FAUX
fig = plt.figure()                # pour l'affichage en 3D
ax = fig.gca(projection='3d')     # pour l'affichage en 3D
ax.plot(x, y, z)                  # tracé de la courbe 3D
ax.set_xlabel('x')  # légende sur l'axe des abscisses
ax.set_ylabel('y')  # légende sur l'axe des ordonnées
ax.set_zlabel('z')  # légende sur l'axe des cotes
plt.show()
```

aurait renvoyé une erreur puisque la ligne `ax.plot(x, y, z)` n'aurait pas pu être interprétée par python, `z` étant un tableau de 100 nombres et `x` et `y` des simples nombres.

e. La trajectoire est une demi-droite ouverte parallèle à l'axe des abscisses d'origine $(0,1,4)$ dirigée du côté des "x croissants". En effet, y et z sont invariants et x, égal à une exponentielle, ne prend que des valeurs strictement positives pour tout t réel.

f. En collectant les réponses des question précédentes :

$$\begin{aligned}
X \text{ est solution de } (S) \text{ sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow X-Y \text{ est solution de } (SH) \text{ sur } \mathbb{R} && \text{d'après la question } \mathbf{4b}\\
&\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R},\ (X-Y)(t)=\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}e^{-10t} \quad \text{avec } (\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3 && \text{d'après la question } \mathbf{2}\\
&\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R},\ X(t)-\begin{pmatrix}e^{8t}\\1\\4\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}e^{-10t} \quad \text{avec } (\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3 && \text{d'après la question } \mathbf{4c}\\
&\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R},\ X(t)=\begin{pmatrix}e^{8t}\\1\\4\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}e^{-10t} \quad \text{avec } (\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3
\end{aligned}$$

Les solutions de (S) sont donc données par : $\boxed{t\mapsto\begin{pmatrix}e^{8t}\\1\\4\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}e^{-10t} \quad \text{avec } (\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3}$

g. Aucun choix de triplet (α,β,γ) ne permet d'obtenir une solution convergente en raison de la première composante qui tend vers $+\infty$ puisque $e^{8t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

$\boxed{\text{Toutes les trajectoires de } (S) \text{ sont donc divergentes.}}$

Exercice 4 (d'après EDHEC)

Partie 1

Pour tout couple (p,q) d'entiers naturels, on pose $I(p,q)=\int_0^1 x^p(1-x)^q\,\mathrm{d}x$.

*(On remarque que ces intégrales font déjà l'objet d'une partie d'un problème sur le sujet **EDHEC 2008** où la récurrence de la question 1.b était à démontrer et non admise. On pourra donc s'entraîner à la faire à la maison à titre d'exercice)*

1. **a.** Pour tout couple d'entiers (p,q), $x\mapsto x^p(1-x)^q$ est continue sur le segment $[0;1]$ (comme fonction polynôme), rendant licite la définition de l'intégrale $I(p,q)$.

b. Soit $(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$. Posons

$$\begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & (1-x)^q & \text{donc} & u'(x) & = & -q(1-x)^{q-1} \\ v'(x) & = & x^p & \text{avec} & v(x) & = & \frac{1}{p+1}x^{p+1} \end{array}$$

Les fonctions u et v ci-dessus de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$ (polynômes), rendant l'intégration par parties licites. Celle-ci permet d'écrire

$$\begin{aligned} I(p,q) &= \int_0^1 x^p(1-x)^q\mathrm{d}x=\left[\frac{x^{p+1}(1-x)^q}{p+1}\right]_0^1+\frac{q}{p+1}\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x \\ &= \frac{q}{p+1}I(p+1,q-1), \end{aligned}$$

car la fonction $x\mapsto x^{p+1}(1-x)^q$ dans le crochet s'annule en 0 et en 1. On a bien la relation demandée qui permet, par une récurrence admise de donner la formule

$$I(p,q)=\frac{p!q!}{(p+q)!}I(p+q,0).$$

2. **a.** Une primitive "à vue" donne :

$$I(p+q,0)=\int_0^1 x^{p+q}\mathrm{d}x=\left[\frac{x^{p+q+1}}{p+q+1}\right]_0^1=\boxed{\frac{1}{p+q+1}}$$

Il suit immédiatement, d'après la relation admise précédemment que

$$I(p,q)=\frac{p!q!}{(p+q)!}I(p+q,0)=\frac{p!q!}{(p+q)!}\times\frac{1}{p+q+1}=\boxed{\frac{p!q!}{(p+q+1)!}}$$

b. Soit $p\in\mathbb{N}$. On a

$$\int_0^1 x^p(1-x)^p\mathrm{d}x=I(p,p)=\frac{p!p!}{(p+p+1)!}=\boxed{\frac{(p!)^2}{(2p+1)!}}$$

Partie 2

Dans cette partie, on pose, pour $n\in\mathbb{N}$, $\alpha_n=\dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2}$.

On considère la fonction b_n définie par $b_n(x)=\begin{cases}\alpha_n x^n(1-x)^n & \text{si } x\in[0;1]\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

3. La fonction b_n satisfait les trois les conditions pour être considérée comme une densité de probabilité :

- Elle est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$ tout entier.
  En effet, elle est produit de trois nombres positifs sur $[0;1]$ et nulle ailleurs.

- Elle est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0 et en 1. En effet :
  - Sur $]0;1[$ c'est une fonction polynôme donc elle est continue.
  - Sur $]-\infty;0[$ et sur $]1;+\infty[$, elle est constante nulle donc continue.

- L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} b_n(x)\mathrm{d}x$ converge et vaut 1.

  En effet, b_n étant nulle en dehors de $[0;1]$, la convergence de l'intégrale ci-dessus se ramène à celle sur $[0;1]$ qui existe car c'est celle d'une fonction continue. De plus, on reconnait les calculs de la Partie 1 :

$$\int_0^1 b_n(x)\mathrm{d}x = \alpha_n \int_0^1 x^n(1-x)^n \mathrm{d}x = \alpha_n \times \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} = 1$$

4. La variable X_0 a pour densité la fonction b_0. Observant que $\alpha_0 = 1$, on a $b_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On reconnait une densité de la loi uniforme $\mathscr{U}([0;1])$ donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{U}([0;1])}$.

5. **a.** Par définition,

$$\begin{aligned} X_n \text{ admet une espérance} &\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x b_n(x)\mathrm{d}x \text{ converge absolument} \\ &\Leftrightarrow \int_0^1 \alpha_n x^{n+1}(1-x)^n \mathrm{d}x \text{ existe} \end{aligned}$$

Naturellement, la dernière intégrale ci-dessus existe (c'est encore l'intégrale sur $[0;1]$ d'une fonction polynomiale continue) et on reconnait même, au facteur α_n près, l'intégrale $I(n+1,n)$. Ainsi, X_n admet une espérance et

$$E(X_n) = \alpha_n I(n+1,n) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \times \frac{(n+1)!n!}{(2n+2)!} = \frac{n+1}{2n+2} = \frac{1}{2},$$

ce qui est bien le résultat demandé.

b. Pour la variance, l'existence de celle-ci est caractérisée par celle du moment d'ordre 2.

$$\begin{aligned} X_n \text{ admet une variance} &\Leftrightarrow X_n^2 \text{ admet une espérance} \\ &\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 b_n(x)\mathrm{d}x \text{ converge (absolument)} \\ &\Leftrightarrow \int_0^1 \alpha_n x^{n+2}(1-x)^n \mathrm{d}x \text{ existe} \end{aligned}$$

Cette intégrale existe à nouveau et on a

$$E\big(X_n^2\big) = \alpha_n I(n+2,n) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \times \frac{(n+2)!n!}{(2n+3)!} = \frac{(n+2)(n+1)}{(2n+3)(2n+2)} = \frac{n+2}{2(2n+3)}.$$

Puis, par la formule de Koenig-Huygens,

$$\begin{aligned} V(X_n) &= E(X_n^2) - E(X_n)^2 \\ &= \frac{n+2}{2(2n+3)} - \frac{1}{4} = \frac{2n+4-(2n+3)}{4(2n+3)} \\ &= \frac{1}{4(2n+3)} \end{aligned}$$

c. X_n admet une variance, on peut donc lui appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Soit $\varepsilon > 0$. On a donc

$$P\Big(\big|X_n - E(X_n)\big| > \varepsilon\Big) \leq \frac{V(X_n)}{\varepsilon^2}$$

C'est à dire

$$P\Big(\big|X_n - \tfrac{1}{2}\big| > \varepsilon\Big) \leq \frac{1}{4(2n+3)\varepsilon^2}$$

Comme

$$\frac{1}{4(2n+3)\varepsilon^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et que $P\Big(\big|X_n - \tfrac{1}{2}\big| > \varepsilon\Big) \geq 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que

$$\lim_{n\to+\infty} P\Big(\big|X_n - \tfrac{1}{2}\big| > \varepsilon\Big) = 0.$$

Partie 3

Pour $n \in \mathbb{N}$, on étudie la fonction f_n définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \int_0^x \alpha_n t^n (1-t)^n \mathrm{d}t.$$

6. Pour $n = 0$, on a déjà vu que $\alpha_0 = 1$ et on a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_0(x) = \int_0^x 1 \mathrm{d}t = \Big[t\Big]_0^x = x$

7. **a.** Pour $x = 1$, c'est l'intégrale déjà calculée dans la partie précédente ; $f_n(1) = 1$.

b. Le changement de variable $u = 1 - t$ est affine ; il est donc licite. On a :

- $t = 1 - u$
- $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$
- Si $t = 0$, $u = 1$
  Si $t = x$, $u = 1 - x$

D'où :

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \int_0^x \alpha_n t^n (1-t)^n \mathrm{d}t \\ &= \int_1^{1-x} \alpha_n (1-u)^n u^n (-\mathrm{d}u) && \text{par le changement de variable} \\ &= \int_{1-x}^1 \alpha_n u^n (1-u)^n \mathrm{d}u && \text{en intervertissant les bornes} \end{aligned}$$

Or, dans l'intégrale définissant $f_n(1-x)$, la variable d'intégration peut indifféremment s'appeler t ou u. On obtient donc :

$$f_n(1-x) = \int_0^{1-x} \alpha_n t^n (1-t)^n \mathrm{d}t = \int_0^{1-x} \alpha_n u^n (1-u)^n \mathrm{d}u$$

En additionnant les deux relations, on obtient :

$$\begin{aligned} f_n(x) + f_n(1-x) &= \int_{1-x}^1 \alpha_n u^n (1-u)^n \mathrm{d}u + \int_0^{1-x} \alpha_n u^n (1-u)^n \mathrm{d}u \\ &= \int_0^1 \alpha_n u^n (1-u)^n \mathrm{d}u && \text{d'après la relation de Chasles} \\ &= f_n(1) = 1 && \text{d'après la question 7.a} \end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat attendu.

c. En appliquant la formule ci-dessus avec $x = 1/2$, on a

$$\begin{aligned} f_n\left(\tfrac{1}{2}\right) + f_n\left(1 - \tfrac{1}{2}\right) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad 2 f_n\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad f_n\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

8. **a.** La fonction $t \mapsto \alpha_n t^n (1-t)^n$ est polynomiale et donc continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction f_n est **LA** primitive de $t \mapsto \alpha_n t^n (1-t)^n$ qui s'annule en 0.
Donc f_n est dérivable (elle est même de classe $\mathscr{C}^1$) et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n'(x) = \alpha_n x^n (1-x)^n.$$

b. La quantité α_n étant strictement positive, le signe de $f_n'(x)$ est le même que celui de $x^n(1-x)^n$. On différencie donc selon la parité de n.

- Si n est pair, les quantité x^n et $(1-x)^n$ sont toujours positives (ce sont des carrés) et on a alors

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$+$	0	$+$	

- Si n est impair, les quantité x^n (respectivement $(1-x)^n$) changent de signe en 0 (respectivement 1)

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^n		$-$	0	$+$		$+$	
$(1-x)^n$		$+$		$+$	0	$-$	
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

9. **a.** D'après la formule du binôme, on peut écrire

$$(1-t)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k t^k$$

de sorte que

$$\alpha_n t^n (1-t)^n = \sum_{k=0}^{n} \alpha^n \binom{n}{k}(-1)^k t^{n+k}.$$

Grâce à une primitive "à vue" et à la linéarité de l'intégrale, on obtient donc :

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^n \binom{n}{k}(-1)^k}{n+k+1}\left[\frac{t^{n+k+1}}{n+k+1}\right]_0^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^n \binom{n}{k}(-1)^k}{n+k+1} x^{n+k+1}$$

ce qui est bien une fonction polynomiale.
En $\pm\infty$, f_n est équivalente à son terme de plus haut degré :

$$f_n(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \frac{\alpha_n}{2n+1}(-1)^n x^{2n+1}$$

- Si n est pair, $(-1)^n = 1$ et $2n+1$ est impair donc

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$$

- Si n est impair, $(-1)^n = -1$ et $2n+1$ est impair donc

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = -\infty$$

b. On a toutes les informations pour dresser le tableau de variations de f_n :

- Si n est pair :

x	$-\infty$	$+\infty$
f_n	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

- Si n est impair :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f_n	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a. f_n étant polynomiale, elle est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n''(x) = \left(f_n'\right)'(x) = \alpha_n \left(nx^{n-1}(1-x)^n - nx^n(1-x)^{n-1}\right) = n\alpha_n x^{n-1}(1-x)^{n-1}(1-2x).$$

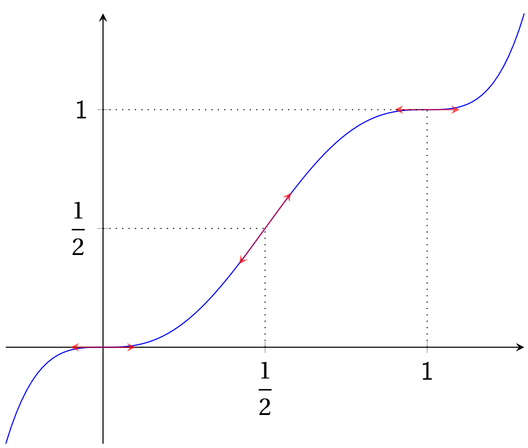
b. On sait que f_n possède un point d'inflexion d'abscisse x si $f_n''(x)$ s'annule en x **en changeant de signe**.

- Si n est impair, $n-1$ est pair et $f_n''(x)$ ne s'annule en changeant de signe qu'en $x = 1/2$ et f_n admet donc un seul point d'inflexion ;

- Si n est pair en revanche, $n-1$ est pair et $f_n''(x)$ s'annule en changeant de signe en $x = 0$, $x = 1/2$ et $x = 1$ ce qui donne dans ce cas trois points d'inflexion.

c. On trace l'allure de la courbe dans les deux cas (selon la parité de n)

Si n est pair (ici $n = 2$) :



Si n est impair (ici $n = 3$) :