Correction CB 2 - Maths II ECE 2021 (adapté)

Partie I - Comportement asymptotique des temps de panne

1. (a) Cette inégalité est vraie pour tout réel $x \geq 0$. En effet, si $0 \leq x \leq 1$ alors on a $0 \leq x^r \leq 1 \leq 1 + x^4$ et si $x \geq 1$ alors $1 + x^4 \geq x^4 \geq x^r$. Comme X_1 est à valeurs positives, on a bien :

$$\boxed{X_1^r \leqslant 1 + X_1^4.}$$

(b) Comme X_1 admet un moment d'ordre 4, X_1^4 admet une espérance. Par linéarité, il en est de même pour $1 + X_1^4$ et par l'inégalité ci-dessus avec la propriété admise de l'énoncé, $\boxed{X_1^r \text{ admet une espérance.}}$

(c) L'intuition est la suivante : X_1 est positive donc $\mu \geqslant 0$. Mais si $\mu = 0$, alors comme on ne peut pas "compenser" avec les négatifs, nécessairement X_1 est la variable certaine égale à 0. Or c'est faux puisque $P(X_1 = 0) < 1$. Donc $\mu \neq 0$ et donc $\boxed{\mu > 0.}$

Une telle réponse sur vos copies me satisfait très bien. Mais profitions de ce corrigé pour vous donner une preuve complète et précise. Le seul point qui manque est de rendre rigoureux cet argument de compensation.

Malheureusement, le programme de maths appliquées ne le permet pas vraiment (le plus simple serait d'utiliser la notion d'espérance conditionnelle hors-programme). Vous pouvez plutôt écrire la phrase suivante, qui veut dire la même chose mais donne l'impression qu'on dit des choses intelligentes :

> « Puisque X_1 est positive, $\mu = E(X_1) = 0$ si et seulement si X_1 est la variable certaine égale à 0. »

(d) $(X_1 - \mu)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} \mu^{4-k} X_1^k$.

D'après la première question, X_1^k admet une espérance pour tout $k \in [\![0, 4]\!]$. $(X_1 - \mu)^4$ admet une espérance.

Ainsi $\boxed{X_1 - \mu \text{ admet un moment d'ordre 4.}}$

2. (a) Soit $n \geq 1$. On a $B_n = B_{n+1} \cup A_n$. Donc $\boxed{B_n \supset B_{n+1}.}$

(b) Procédons par double implication.

($\Rightarrow$) Montrons plutôt la contraposée. On suppose que $\omega \in A_k$ pour un nombre fini de k. Soit K le plus grand d'entre eux. On a alors $\omega \notin B_{K+1}$ et donc $\boxed{\omega \notin B.}$

($\Leftarrow$) On suppose qu'il existe une infinité de $k \geq 1$ tels que $\omega \in A_k$. Supposons par l'absurde que $\omega \notin B$. Cela signifie qu'il existe $n \geq 1$ tel que $\omega \notin B_n$, donc que pour tout $k \geq n$, $\omega \notin A_k$. Ainsi, ω est au plus dans un nombre fini de A_k (les $n-1$ premiers). $\boxed{\text{Absurde.}}$ Donc $\boxed{\omega \in B.}$

(c) i. On a $B_n \supset B_{n+1}$ pour tout n donc en passant aux probabilités :

$$\underbrace{P(B_n)}_{=u_n} \geqslant \underbrace{P(B_{n+1})}_{=u_{n+1}}$$

et donc (u_n) est décroissante.

ii. De même, pour tout $n \geq 1$, on a $B_n \supset B$. Donc $P(B_n) \geqslant P(B)$.

Ainsi $\boxed{\forall n \geqslant 1, u_n \geqslant P(B).}$

Ainsi (u_n) est décroissante et minorée. D'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$ vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$. De plus :

$$\boxed{\ell \geqslant P(B).}$$

On ne sait pas nécessairement à ce stade si $\ell = P(B)$. Le sujet nous dit cependant qu'on peut l'admettre pour la suite.

Remarque : c'est beaucoup plus difficile à montrer. Pour ceux que ça intéresse, cela peut tout de même se faire dans le cadre du programme de mathématiques appliquées. L'idée est de poser une suite d'événements (C_n) définie par :

$$C_n = B_n \setminus B_{n+1}.$$

On a alors $B_n = \left(\cup_{k=n}^{+\infty} C_k\right) \cup B$ où l'union est disjointe.
On peut alors utiliser la propriété : $P(\bigcup_{i\in I} D_i) = \sum_{i\in I} P(D_i)$ lorsque l'union est disjointe (cela s'appelle la σ-additivité de la probabilité). On peut alors travailler sur des séries et ainsi montrer la bonne limite.

(d) Soit C et D deux événements. On a

$$\boxed{P(C \cup D) = P(C) + P(D) - \underbrace{P(C \cap D)}_{\geq 0} \leq P(C) + P(D).}$$

(e) Montrons par récurrence, pour tout $N \geq n$, la proposition suivante :

$$\mathcal{H}(N) : \left[P\left(\bigcup_{k=n}^{N} A_k\right) \leq \sum_{k=n}^{N} P(A_k)\right]$$

- **Initialisation :** $H(n)$ est vraie car elle ne dit rien d'autre que $\boxed{P(A_n) \leq P(A_n).}$
- **Hérédité :** Soit $N \geq n$ un entier et supposons $\mathcal{H}(N)$. Alors

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{k=n}^{N+1} A_k\right) &= P\left(\left(\bigcup_{k=n}^{N} A_k\right) \cup A_{N+1}\right) \\ &\leq P\left(\bigcup_{k=n}^{N} A_k\right) + P(A_{N+1}) \\ &\leq \sum_{k=1}^{N} P(A_k) + P(A_{N+1}) \quad \text{par } \mathcal{H}(N) \\ &= \boxed{\sum_{k=1}^{N+1} P(A_k).} \end{aligned}$$

d'où l'hérédité et la conclusion.

(f) Comme la série de terme générale $P(A_n)$ converge, on a :

$$\boxed{\sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(A_k) - \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} P(A_k)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=1}^{+\infty} P(A_k)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.}$$

(g) En passant à la limite dans $P(B_n) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k)$, on obtient donc $P(B) \leqslant 0$ et comme $P(B) \geqslant 0$, on a $\boxed{P(B) = 0.}$

3. (a) C'est la loi faible des grands nombres.
En effet, les Y_k sont bien mutuellement indépendantes. De plus les Y_k admettent un moment d'ordre 4, donc admettent aussi un moment d'ordre 1 et 2 (c'est l'object de la toute première question). Un moment d'ordre 1 c'est juste une espérance. Et l'existence du moment d'ordre 2, d'après la formule de Kœnig-Huygens, donne l'existence de la variance.
Comme les Y_k suivent la même loi, elles ont bien même espérance (0 en l'occurence car centrées) et même variance (notée σ^2 dans le sujet).
Ainsi d'après la loi faible des grands nombres, on a :

$$\forall \epsilon > 0, \ \lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\overline{Y}_n - E(Y_1)\right| \geqslant \epsilon\right) = 0.$$

Donc :

$$\forall \epsilon > 0, \ \lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| \geqslant \epsilon\right) = 0.$$

De plus, on a :

$$0 \leqslant P\left(\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| > \epsilon\right) \leqslant P\left(\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| \geqslant \epsilon\right).$$

Donc par encadrement :

$$\boxed{\forall \epsilon > 0, \lim_{n \to +\infty} P\left(\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| > \epsilon\right) = 0.}$$

(b) i. Comme l'inégalité $\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| > \varepsilon$ concerne des nombres positifs, elle est équivalente, par bijectivité croissante de la fonction puissance 4 sur $\mathbb{R}_+$, à $\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4 > \varepsilon^4$ et donc :

$$\boxed{P\left(\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| > \epsilon\right) = P\left(\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4 > \epsilon^4\right).}$$

ii. C'est l'inégalité de Markov :

$$\boxed{P\left(\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4 > \varepsilon^4\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^4} E\left(\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4\right)}$$

puisque $\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4$ est bien positive à condition qu'on admette l'existence de l'espérance.

Remarque : le sujet est bizarement fait. Il faudrait techniquement montrer que $\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4$ admet une espérance. Mais ça se déduit des deux questions suivantes. Je l'ai laissé dans cet ordre, mais c'est assez étrange.

Une interprétation possible du sujet qui rend cet ordre plus raisonnable (mais part dans du hors-programme...) est de considérer que puisque $\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4$ est positive, on peut toujours lui attribuer une espérance quitte à poser : $E\left(\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4\right) = +\infty$.

Dans le cas où on utiliserait cette définition, l'inégalité est alors triviale.

iii. Quand on développe $\Sigma_n^4 = \left(\sum_{k=1}^n Y_k\right)^4$, pour chaque terme développé il faut choisir quatre fois (dans chaque parenthèse) un des Y_k. Dans le résultat proposé,

- la première somme rassemble tous les termes où l'on a choisi quatre fois le même Y_k.
- La seconde, ceux où l'on choisit deux fois un Y_k et deux fois un autre Y_j. Il y a $\frac{1}{2}\binom{4}{2} = 3$ façons de choisir ces termes en développant : on a deux parenthèses parmi les 4 où l'on peut choisir Y_k, puis il *faut* choisir Y_j dans les autres, et on divise $\binom{4}{2}$ par 2 car sinon on compterait deux fois les mêmes termes (quand k et j échangent leurs valeurs).
- Enfin, la troisième somme correspond à tous les autres termes, ceux où l'on ne choisit qu'une fois un Y_k puis que des autres.

Ainsi :

$$\boxed{(\Sigma_n)^4 = \sum_{k=1}^n Y_k^4 + 3\sum_{k=1}^n \sum_{j=1, j\neq k}^n Y_k^2 Y_j^2 + \sum_{k=1}^n Y_k W_k.}$$

iv. On applique la linéarité de l'espérance à l'égalité prouvée ci-dessus :

$$\begin{aligned} E(\Sigma_n^4) &= \sum_{k=1}^n E(Y_k)^4 + 3\sum_{k=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^n E(Y_k^2 Y_j^2) + \sum_{k=1}^n E(Y_k W_k) \\ &= \sum_{k=1}^n \rho^4 + 3\sum_{k=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^n \sigma^2\sigma^2 + \sum_{k=1}^n 0 \times E(W_k) \text{ par indépendance des } Y_k \text{ et le lemme des coalitions} \\ &= \boxed{n\rho^4 + 3n(n-1)\sigma^4} \end{aligned}$$

car il y a n valeurs possibles de k et $n-1$ de j dans la deuxième somme.

v. Soit $n \geq 1$ entier. On a :

$$E\left(\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4\right) = \frac{\rho^4}{n^3} + \frac{3n(n-1)}{n^4}\sigma^4 \leq \frac{\rho^4}{n^2} + \frac{3n^2\sigma}{n^4} = \frac{\rho^4 + 3\sigma}{n^2}.$$

Ainsi, $\boxed{C = \rho^4 + 3\sigma \text{ convient.}}$

vi. On applique ii. avec $\epsilon = \frac{1}{n^{1/8}}$ puis v., on a bien :

$$\boxed{P\left(\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| > \frac{1}{n^{1/8}}\right) = P\left(\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4 > \left(\frac{1}{n^{1/8}}\right)^4\right) \leq \frac{1}{\left(\frac{1}{n^{1/8}}\right)^4} E\left(\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4\right) \leq n^{4/8}\frac{C}{n^2} \leq \frac{C}{n^{3/2}}.}$$

4. (a) On a pour tout $n \geq 1$:

$$0 \leq P(A_n) \leq \frac{C}{n^{3/2}}.$$

Or $\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \frac{1}{n^{3/2}}$ est une série de Riemann convergente ($3/2 > 1$). Comme tous les termes sont positifs, par critère de comparaison, $\boxed{\text{la série de terme général } P(A_n) \text{ converge.}}$

(b) C'est exactement ce qui a été démontré dans la question 2.

En effet, avec les notations de la question 2, l'événement « A_n se produit pour une infinité de valeurs n » est noté B. On cherche donc à montrer $\boxed{P(B) = 0.}$

On a montré dans la question 2 que c'est le cas dès lors que la série de terme général $P(A_n)$ converge.

(c) Donc la probabilité que les A_n ne se produisent qu'un nombre fini de fois est 1. Ainsi, avec probabilité 1, à partir d'un certain on a $\left|\frac{\Sigma_n(\omega)}{n}\right| \leq \frac{1}{n^{1/8}}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\Sigma_n(\omega)}{n} = 0$:

$$\boxed{P\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{\Sigma_n}{n} = 0\right) = 1.}$$

(d) Ce que l'on vient de faire dans 3. et 4. s'applique aux $Y_k = X_k - \mu$: elles sont bien indépendantes, centrées, de même loi, et $X_1 - \mu$ admet un moment d'ordre 4 par la question 1.(d). Avec ce choix, on remarque que $\Sigma_n = S_n - n\mu$ donc $\frac{\Sigma_n}{n} = \frac{S_n}{n} - \mu$ et la question précédente conclut.

5. (a) Soit $\omega \in \Omega$. Soit $n \in \mathbb{N}$. $S_{n+1}(\omega) - S_n(\omega) = X_{n+1}(\omega) \geq 0$. Donc $\boxed{(S_n(\omega)) \text{ est croissante.}}$

(b) Supposons $S_\infty(\omega) \in \mathbb{R}_+$, ainsi $(S_n(w))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Comme cette suite est par ailleurs croissante, elle est majorée, et positive, donc bornée.

Ainsi $\boxed{\frac{S_n(\omega)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.}$

(c) Comme $\mu > 0$, par la question 4.(d) l'événement $\left[\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = 0\right]$ est de probabilité nulle. Or $[S_\infty \in \mathbb{R}_+] \subset \left[\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = 0\right]$ donc $P(S_\infty \in \mathbb{R}_+) = 0$.

Ainsi $\boxed{P(S_\infty = +\infty) = 1 - P(S_\infty \in \mathbb{R}_+) = 1.}$

Partie II - Le processus de renouvellement

6. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $S_k \leq s$ alors $S_k \leq t$ puisque $s \leq t$ donc :

$$\{k \in \mathbb{N},\ S_k \leq s\} \subset \{k \in \mathbb{N},\ S_k \leq t\}$$

donc le plus grand élément de $\{k \in \mathbb{N},\ S_k \leq s\}$ est nécessairement plus petit que le plus grand élément de $\{k \in \mathbb{N},\ S_k \leq t\}$ et ainsi $\boxed{N_s \leq N_t.}$

(b) Procédons par double inclusion.

$[N_t \geq n] \subset [S_n \leqslant t]$. Soit $\omega \in \Omega$. Supposons $N_t(\omega) \geq n$. On a $S_{N_t(\omega)} \leq t$. Comme $(S_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a alors $\boxed{S_n(\omega) \leq t.}$

$[N_t \geq n] \supset [S_n \leqslant t]$. Soit $\omega \in \Omega$. Supposons $S_n(\omega) \leq t$. Alors $n \in \{k \in \mathbb{N},\ S_n(\omega) \leq t\}$ donc $N_t(\omega) \geq n$.

Par double inclusion, on a bien :

$$\boxed{[N_t \geq n] = [S_n \leqslant t].}$$

(c) Par (a), la fonction $t \mapsto N_t(\omega)$ est croissante. Si elle est majorée, d'après le théorème de limite monotone, elle admet une limite réelle. Si elle n'est pas majorée, d'après le même théorème elle tend vers $+\infty$. Dans tous les cas, $\boxed{\text{elle admet bien une limite dans } \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.}$

(d) i. $t \mapsto N_t(\omega)$ est une fonction à valeurs dans $\mathbb{N}$ et qui converge vers K. Montrons qu'elle est alors stationnaire. Rappelons la définition de la limite :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists T_\omega > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}_+,\ t \geqslant T_\omega \Rightarrow |N_t(\omega) - K| \leqslant \varepsilon.$$

En particulier, en prenant $\varepsilon = 1/3$, il existe T_ω tel que pour tout $t \geq T_\omega$, $N_t(\omega) \in]K - 1/3, K + 1/3[$, et donc $\boxed{N_t(\omega) = K}$ car le seul entier de cet intervalle est K.

ii. On a en particulier $N_{T_\omega}(\omega) = K$. Donc $N_{T_\omega}(\omega) \geq K$. Puis comme $[N_{T_\omega} \geq K] = [S_K \leqslant T_\omega]$, on en déduit :

$$\boxed{S_K(\omega) \leqslant T_\omega.}$$

Soit maintenant $t \geqslant T_\omega$. On a $N_t(\omega) = K$ puisque $t \mapsto N_t(\omega)$ est constante à partir de T_ω.
Ainsi $\omega \notin [N_t \geqslant K + 1]$. Puis comme $[N_t \geq K + 1] = [S_{K+1} \leqslant t]$, on en déduit :

$$\omega \notin [S_{K+1} \leqslant t]$$

et donc :

$$\boxed{S_{K+1}(\omega) > t.}$$

iii. Nous supposions déjà que $N_\infty(\omega) = K$.
On a $X_{k+1}(\omega) = S_{K+1}(\omega) - S_k(\omega)$. Donc d'après la question précédente :

$$X_{k+1}(\omega) \geq t - T_\omega.$$

pour tout $t \geqslant T_\omega$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On pose $t = T_\omega + x$. On a alors :

$$\boxed{X_{k+1}(\omega) \geq x.}$$

C'est absurde car aucun nombre n'est plus grand que tout autre nombre.

iv. On en déduit que $N_\infty(\omega)$ ne peut être entier.
Or on ne peut pas avoir $N_\infty(\omega) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Montrons-le par l'absurde. Supposons $N_\infty(\omega) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.
Posons maintenant η la distance de $N_\infty(\omega)$ à l'entier le plus proche. Rappelons la définition de la limite :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists t_0 > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}_+,\ t \geqslant t_0 \Rightarrow |N_t(\omega) - N_\infty(\omega)| \leqslant \varepsilon.$$

En posant $\varepsilon = \frac{\eta}{2}$. On a donc $N_t(\omega) \in \left]N_\infty(\omega) - \frac{\eta}{2}, N_\infty(\omega) + \frac{\eta}{2}\right[$ pour tout $t \geqslant t_0$. Pourtant, par construction, $\left]N_\infty(\omega) - \frac{\eta}{2}, N_\infty(\omega) + \frac{\eta}{2}\right[$ ne contient aucun entier.

$\boxed{\text{C'est donc absurde.}}$ D'où $\boxed{N_\infty(\omega) \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}.}$

Ainsi $N_\infty(\omega) \notin \mathbb{N}$ et $N_\infty(\omega) \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ donc $\boxed{N_\infty(\omega) \notin \mathbb{R}.}$

La seule possibilité restante est donc : $\boxed{N_\infty(\omega) = +\infty.}$

D'où pour tout $\omega \in \Omega$, $N_\infty(\omega) = +\infty$. Donc $\boxed{\text{l'événement } [N_\infty = +\infty] \text{ est certain.}}$

7.

```python
def Renouvellement(t):
    N = 0
    S = 0
    while S <= t :
        S = S + X()
        N = N+1
    return N
```

8. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}_+$. On a : $[N_t = n] = [N_t \geq n] \setminus [N_t \geq n+1]$.
Puis comme, $[N_t \geq n+1] \subset [N_t \geq n]$ on a bien :

$$\boxed{P(N_t = n) = P(N_t \geq n) - P(N_t \geq n+1).}$$

(b) i. On a : $\boxed{F_0(t) = P(S_0 \leq t) = P(0 \leq t) = 1}$ et $\boxed{F_1(t) = P(X_1 \leq t) = F(t).}$

ii. Par la question précédente et 6.(b),

$$\boxed{P(N_t = n) = P(S_n \leq t) - P(S_{n+1} \leq t) = F_n(t) - F_{n+1}(t).}$$

9. Soit $j \in \mathbb{N}$. Comme $([U = k])_{k \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, par la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} P(V = j) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P\left([V = j] \cap [U = k]\right) = \sum_{k \in E} P(U = k) P_{[U=k]}\left(V = j\right) \\ &= \sum_{k \in E} P(U' = k) P_{[U'=k]}\left(V' = j\right) = \boxed{P(V' = j)} \end{aligned}$$

où E désigne l'ensemble des $k \in \mathbb{N}$ tels que $P(U = k) \neq 0$. Ainsi $\boxed{V \text{ et } V' \text{ suivent bien la même loi.}}$

10. (a) Soit $i \geq 1$. $W = i$ si et seulement si $Z_1, \ldots, Z_{i-1} = 0$ et $Z_i = 1$. Donc :

$$\begin{aligned} P(W = i) &= P([Z_1 = 0] \cap \cdots \cap [Z_{i-1} = 0] \cap [Z_i = 1]) \\ &= P(Z_1 = 0) \times \cdots \times P(Z_{i-1} = 0) P(Z_i = 1) \\ &\quad \text{par indépendance mutuelle} \\ &= \underbrace{(1-p)\ldots(1-p)}_{i-1 \text{ termes}} p \\ &= \boxed{(1-p)^{i-1} p.} \end{aligned}$$

$\boxed{W \text{ suit en fait une loi géométrique de paramètre } p.}$

(b) i. Soit $k \geq n$.
On a :

$$[W_n = k] = [Z_1 + \cdots + Z_{k-1} = n-1] \cap [Z_k = 1].$$

En effet, pour que $W_n = k$ il faut que $Z_k = 1$ (sinon $\sum_{l=1}^{k} Z_l = \sum_{l=1}^{k-1} Z_l$).
Donc pour avoir $W_n = k$, il y a nécessairement $n-1$ succès parmi les $k-1$ premières épreuves représentées par les Z_l, suivies d'un succès pour la $n^{\text{ème}}$ épreuve.
On a ainsi :

$$\begin{aligned} P(W_n = k) &= P\left([Z_1 + \cdots + Z_{k-1} = n-1] \cap [Z_k = 1]\right) \\ &= P\left(Z_1 + \cdots + Z_{k-1} = n-1\right) P(Z_k = 1) \\ &\quad \text{(par indépendance mutuelle et lemme des coalitions)} \\ &= \left(\binom{k-1}{n-1} p^{n-1} (1-p)^{(k-1)-(n-1)}\right) \times p \\ &= \boxed{\binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}.} \end{aligned}$$

ii. Soit $k \geq n$ et $j \geq k+1$.
On a :

$$P_{[W_n = k]}(W_{n+1} = j) = \frac{P([W_n = k] \cap [W_{n+1} = j])}{P(W_n = k)}.$$

Or :

$$[W_n = k] \cap [W_{n+1} = j] = [Z_1 + \cdots + Z_{k-1} = n-1] \cap [Z_k = 1] \cap [Z_{k+1} = 0] \cap \cdots \cap [Z_{j-1} = 0] \cap [Z_j = 1].$$

Par indépendance mutuelle (et lemme des coalitions), on en déduit :

$$P([W_n = k] \cap [W_{n+1} = j]) = P(W_n = k)P(Z_{k+1} = 0) \cdots P(Z_{j-1} = 0)P(Z_j = 1)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} P_{[W_n=k]}(W_{n+1} = j) &= P(Z_{k+1} = 0) \cdots P(Z_{j-1} = 0)P(Z_j = 1) \\ &= (1-p) \cdots (1-p)p \\ &= (1-p)^{j-1-(k+1)+1}p \\ &= \boxed{p(1-p)^{j-k-1}.} \end{aligned}$$

(c) On suppose donc que les X_i suivent une loi géométrique de paramètre p.

i. Sachant $[S_n = k]$, l'événement $[S_{n+1} = j]$ signifie que $X_{n+1} = j - k$. Comme X_{n+1} a la même loi que X_1, on a :

$$\boxed{P_{[S_n=k]}(S_{n+1} = j) = p(1-p)^{j-k-1}.}$$

ii. Procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation :** Pour $n = 1$, on a $S_1 = X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
  Et $P(W_1 = k) = \binom{k-1}{1-1} p^1(1-p)^{k-1} = p(1-p)^{k-1}$. Donc $W_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
  Et ainsi $\boxed{S_1 \text{ et } W_1 \text{ ont bien la même loi.}}$
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que S_n et W_n suivent la même loi. Montrons que S_{n+1} et W_{n+1} suivent la même loi.
  D'après les questions précédentes, on a :

  $$P_{[S_n=k]}(S_{n+1} = j) = P_{[W_n=k]}(W_{n+1} = j)$$

  pour tout j et tout $k \geqslant j + 1$. On est donc dans les conditions de la question 9.
  Ainsi $\boxed{S_{n+1} \text{ et } W_{n+1} \text{ suivent la même loi.}}$

(d) **Remarque :** *Ce n'est pas clairement annoncé mais cette question utilise encore l'hypothèse de la question (c).*

Par 8.(b)ii. et la question précédente,

$$\begin{aligned} P(N_t) &= F_n(t) - F_{n+1}(t) \\ &\quad \text{(question 8(b)ii)} \\ &= P(S_n \leq t) - P(S_{n+1} \leq t) \\ &\quad \text{(définitions)} \\ &= P(W_n \leq t) - P(W_{n+1} \leq t) \\ &\quad \text{(question précédente)} \\ &= P(W_n \leq \lfloor t \rfloor) - P(W_{n+1} \leq \lfloor t \rfloor) \\ &= \text{(car } W_n \text{ est à valeurs entières)} \\ &= \sum_{k=n}^{\lfloor t \rfloor} P(W_n = k) - \sum_{k=n+1}^{\lfloor t \rfloor} P(W_{n+1} = k) \\ &\quad \text{(formule des probabilités totales)} \\ &= \boxed{\sum_{k=n}^{\lfloor t \rfloor} \binom{k-1}{n-1} p^n(1-p)^{k-n} - \sum_{k=n+1}^{\lfloor t \rfloor} \binom{k-1}{n} p^{n+1}(1-p)^{k-n-1}.} \end{aligned}$$

Partie III - Théorème du renouvellement

11. (a) Soit $\omega \in \Omega$.
$N_t(\omega)$ est le dernier rang k auquel la suite croissante $(S_k(\omega))_{k \in \mathbb{N}}$ est inférieure ou égale à t. Donc, on a bien bien $\boxed{S_{N_t}(\omega) \leq t}$ mais $\boxed{S_{N_t+1}(\omega) > t.}$

(b) A priori, il suffit de diviser l'inégalité ci-dessus par $N_t(\omega)$. Le problème est que ce n'est possible que $N_t(\omega) > 0$.

On a montré à la question 6(d) que $\lim_{t\to+\infty} N_t(\omega) = +\infty$ (avec probabilité 1). Donc pour t suffisamment grand, on a $N_t(\omega) > 0$.

Il existe donc $T_\omega > 0$ tel que pour tout $t \geqslant T_\omega$:

$$\boxed{\frac{S_{N_t}(\omega)}{N_t(\omega)} \leq \frac{t}{N_t(\omega)} < \frac{S_{N_t+1}(\omega)}{N_t(\omega)}.}$$

(c) D'après la question 4(d) :

$$P\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = \mu\right) = 1.$$

Or $\lim_{t\to+\infty} N_t(\omega) = +\infty$ (avec probabilité 1). Donc par composition de limite, $\boxed{\text{avec probabilité 1}}$ on a :

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} \frac{S_{N_t}}{N_t} = \mu.}$$

(d) On a :

$$\frac{S_{N_t+1}}{N_t} = \frac{S_{N_t+1}}{N_t+1}\frac{N_t+1}{N_t}.$$

Comme $\lim_{t\to+\infty} N_t(\omega) = +\infty$ avec probabilité 1, on a (avec probabilité 1) :

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{N_t+1}{N_t} = 1.$$

Et donc avec probabilité 1 :

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} \frac{S_{N_t+1}}{N_t} = \mu \times 1 = \mu.}$$

(e) Par l'encadrement obtenu en (b), on a avec probabilité 1 $\boxed{\frac{t}{N_t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} \mu.}$

Puis comme $\mu > 0$, on peut passer à l'inverse et donc :

$$\boxed{\frac{N_t}{t} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\mu}}$$

avec probabilité 1.

12. (a) Distinguons deux cas :

- **Si** $U(\omega) = 0$ **:** c'est immédiat avec la convention mentionnée.
- **Si** $U(\omega) > 0$ **:** dans ce cas, $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ décroit vers 0. Donc à partir d'un certain rang on aura $\frac{1}{n} < U(\omega)$. Ainsi :

$$\boxed{Y_n(\omega) = 0.}$$

(b) Pour tout $\omega \in \Omega$ on a donc $\lim_{\to+\infty} Y_n(\omega) = 0$.

L'événement $\boxed{\left[\lim_{\to+\infty} Y_n(\omega) = 0\right] \text{ est donc certain.}}$

En particulier, $\boxed{\text{sa probabilité vaut 1.}}$

(c) Soit $n \geq 1$ un entier. On a :

$$\boxed{E(Y_n) = 0 \cdot P(U > 1/n) + n \cdot P(U \leq 1/n) = n \cdot \frac{1}{n} = 1.}$$

On constate effectivement en particulier que $\lim_{n\to+\infty} E(Y_n) \neq E(\lim_{n\to+\infty} Y_n)$.

13. (a) Soit $\omega \in \Omega$. On a :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} X_k(\omega)\mathbf{1}_{[J\geq k]}(\omega) = \sum_{k=1}^{J(\omega)} X_k(\omega)\cdot 1 + \sum_{k=J(\omega)+1}^{+\infty} X_k(\omega)\cdot 0 = \sum_{k=1}^{J(\omega)} X_k(\omega) = S_J(\omega).}$$

Ceci étant valable pour tout $\omega \in \Omega$, on a bien :

$$\boxed{S_J = \sum_{k=1}^{+\infty} X_k \mathbf{1}_{[J\geq k]}.}$$

(b) Soit $k \geq 1$.
On a : $\mathbf{1}_{[J\geq k]} = 1 - \mathbf{1}_{[J\leq k-1]}$. Or $\mathbf{1}_{[J\leq k-1]}$ est indépendante de X_k par hypothèse.
Donc par lemme des coalitions, $\boxed{\mathbf{1}_{[J\geq k]} \text{ et } X_k \text{ le sont.}}$

(c) i. Soit $\omega \in \Omega$.
On a $\mathbf{1}_{[U(\omega)\geq n]} = 1$ pour $1 \leq n \leq U(\omega)$ et vaut 0 ensuite, donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{[U(\omega)\geq n]} = \sum_{n=1}^{U(\omega)} 1 = U(\omega)}$$

et ceci étant valable pour tout $\omega \in \Omega$, on a bien :

$$\boxed{U = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{[U\geq n]}.}$$

ii. Sous réserve d'existence, on peut passer à l'espérance avec la formule admise dans l'énoncé. On obtient :

$$E(U) = \sum_{n=1}^{+\infty} E\left(\mathbf{1}_{[U\geq n]}\right)$$

Or $\mathbf{1}_{[U\geq n]}$ suit une loi de Bernoulli de paramètres $P(U \geq n)$. Donc :

$$E\left(\mathbf{1}_{[U\geq n]}\right) = P(U \geq n).$$

Et ainsi :

$$\boxed{E(U) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(U \geq n).}$$

(d) Par un argument similaire, on trouve :

$$E(S_J) = E\left(\sum_{k=1}^{+\infty} X_k \mathbf{1}_{[J\geq k]}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} E\left(X_k \mathbf{1}_{[J\geq k]}\right).$$

Or X_k et $\mathbf{1}_{[J\geq k]}$ sont indépendantes. Donc :

$$E\left(X_k \mathbf{1}_{[J\geq k]}\right) = E\left(X_k\right) E\left(\mathbf{1}_{[J\geq k]}\right).$$

Puis, on a pour tout k, $E(X_k) = E(X_1)$ (car les X_k suivent tous la même loi).
Ainsi :

$$\begin{aligned} E(S_J) &= \sum_{k=1}^{+\infty} E(X_1) E\left(\mathbf{1}_{[J\geq k]}\right) \\ &= E(X_1) \sum_{k=1}^{+\infty} E\left(\mathbf{1}_{[J\geq k]}\right) \\ &= E(X_1) E\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{[J\geq k]}\right) \\ &= \boxed{E(X_1)E(J)} \end{aligned}$$

(d'après la question précédente)

Et ainsi :

$$\boxed{E(S_J) = E(X_1)E(J) = \mu E(J).}$$

14. (a) On a l'égalité d'événements :

$$[J \leq n] = [N_t + 1 \leq n] = [N_t \leq n-1] = [S_n > t].$$

Or $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Or les $X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}, \ldots$ sont mutuellement indépendants.
Donc d'après le lemme des coalitions, la variable $\mathbb{1}_{[J \leq n]}$, construite à partir de $X_1, \ldots, X_n$, est $\boxed{\text{indépendante}}$ de $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$.

(b) En appliquant le résultat de la question 13(d), on obtient immédiatement :

$$E(S_{N_t+1}) = \mu E(N_t + 1).$$

Or $E(N_t + 1) = E(N_t) + 1$ (par transformation affine). D'où effectivement :

$$\boxed{E(S_{N_t+1}) = \mu(E(N_t) + 1).}$$

Comme $\mu > 0$, on peut inverser la formule pour obtenir :

$$\boxed{E(N_t) = \frac{E(S_{N_t+1})}{\mu} - 1.}$$

15. Soit $t > 0$.
En divisant l'égalité précédente par $t > 0$, on obtient :

$$\frac{E(N_t)}{t} = \frac{E(S_{N_t+1})}{t\mu} - \frac{1}{t}.$$

On va désormais chercher à minorer $\frac{E(S_{N_t+1})}{t}$. Remarquons que :

$$\frac{E(S_{N_t+1})}{t} = E\left(\frac{S_{N_t+1}}{t}\right)$$

par linéarité de l'espérance. Or d'après la question 11(a), on a :

$$t < S_{N_t+1}.$$

Donc :

$$1 < \frac{S_{N_t+1}}{t}.$$

Et par croissance de l'espérance, on obtient :

$$E\left(\frac{S_{N_t+1}}{t}\right) \geq 1.$$

D'où finalement :

$$\boxed{\frac{E(S_{N_t+1})}{t} \geq \frac{1}{\mu} - \frac{1}{t}.}$$

16. (a) Comme les X_i sont mutuellement indépendantes, par l'application de la fonction $f : x \mapsto \min(x, b)$ et le lemme des coalitions, les $f(X_i)$ sont également mutuellement indépendants.

Donc $\boxed{\text{les } \tilde{X}_i \text{ sont mutuellement indépendants.}}$

De plus, $\boxed{\text{les } \tilde{X}_i \text{ ont même loi}}$ car les X_i ont même loi.

Enfin, comme $b > 0$ et $X_i \geq 0$, on a bien $\boxed{\tilde{X}_i = \min(b, X_i) \geq 0.}$

(b) i. Soit $n \geq 1$.
Pour tout $i[\![1,n]\!]$, comme on a $\tilde{X}_i = \min(b, X_i)$, on a :

$$\tilde{X}_i \leq X_i.$$

Donc en sommant :

$$\boxed{\widetilde{S}_n \leq S_n.}$$

ii. Soit $t \geq 0$.
Pour tout $k \geq 0$ entier, par l'inégalité précédente si $S_k \leq t$ alors $\widetilde{S}_k \leq t$.
En particulier, pour $k = N_t$, on a $S_{N_t} \leq t$ et donc $\widetilde{S}_{N_t} \leq t$.
Mais $\tilde{N}_t$ est le plus grand k tel que $\widetilde{S}_k \leq t$ donc :

$$\boxed{\widetilde{N}_t \geq N_t.}$$

iii. Soit $t \geq 0$.
On a :

$$\widetilde{S}_{\widetilde{N}_t+1} = \widetilde{S}_{\widetilde{N}_t} + \widetilde{X}_{\widetilde{N}_t+1}.$$

Or $\widetilde{X}_{\widetilde{N}_t+1} \leq b$ puisque les $\widetilde{X}_i$ sont tous inférieurs ou égaux à b.
Et on a déjà $\widetilde{S}_{\widetilde{N}_t} \leq t$.
Ainsi :

$$\boxed{\widetilde{S}_{\widetilde{N}_t+1} \leq t + b.}$$

(c) i. Soit $t > 0$.
On applique la question 14(b) car les mêmes hypothèses sont vérifiées par les $\widetilde{X}_i$ et par les X_i. On a donc :

$$E(\tilde{N}_t) = \frac{E(S_{\tilde{N}_t})}{\tilde{\mu}_b} - 1.$$

Divisons maintenant par $t > 0$. On obtient alors :

$$\boxed{\frac{E(\tilde{N}_t)}{t} = \frac{E(S_{\tilde{N}_t})}{t\tilde{\mu}_b} - \frac{1}{t}.}$$

ii. Soit $b > 0$.
On sait que $\tilde{N}_t \geq N_t$. Donc par croissance de l'espérance, on a :

$$E(\tilde{N}_t) \geq E(N_t).$$

Donc on a bien (après division par $t > 0$) :

$$\boxed{\frac{E(N_t)}{t} \leq \frac{E(\tilde{N}_t)}{t}.}$$

Ensuite, on a :

$$\frac{E(\tilde{N}_t)}{t} = \frac{E(S_{\tilde{N}_t})}{t\tilde{\mu}_b} - \frac{1}{t}$$

d'après la question précédente. Or d'après la question (b)iii, on a :

$$\widetilde{S}_{\widetilde{N}_t+1} \leq t + b.$$

Donc par croissance de l'espérance, on obtient :

$$\frac{E(S_{\tilde{N}_t})}{t\tilde{\mu}_b} - \frac{1}{t} \leq \frac{E(t+b)}{t\mu_b} - \frac{1}{t}.$$

On a $E(t+b) = t+b$ et comme $t > 0$, on peut simplifier :

$$\boxed{\frac{E(\tilde{N}_t)}{t} \leq \frac{t+b}{t\mu_b}.}$$

(d) i. Posons $b = \sqrt{t}$. On a alors $\tilde{\mu}_b = E(\min(\sqrt{t}, X_1))$. Et donc le résultat de la questions (d)i devient :

$$\boxed{\frac{E(N_t)}{t} \leq \frac{t + \sqrt{t}}{tE(\min(\sqrt{t}, X_1))}.}$$

ii. Puisque $\min(\sqrt{t}, X_1) \leq X_1$ alors $\boxed{X_1 - \min(\sqrt{t}, X_1) \geq 0.}$

Pour la deuxième inégalité, on fixe $\omega \in \Omega$.

On compare alors $X_1(\omega) - \min(\sqrt{t}, X_1(\omega))$ à $X_1(\omega)\mathbf{1}_{[X_1 > \sqrt{t}]}(\omega)$. Par disjonction de cas :

- Si $X_1(\omega) > \sqrt{t}$ alors $\min(\sqrt{t}, X_1(\omega)) = \sqrt{t}$ et l'inégalité recherchée est $X_1(\omega) - \sqrt{t} \leq X_1(\omega)$ ce qui est vrai.
- Sinon, l'inégalité recherchée est équivalente à $0 \leq 0$ qui est vraie aussi.

Donc, dans tous les cas, on a :

$$X_1(\omega) - \min(\sqrt{t}, X_1(\omega)) \leq X_1(\omega)\mathbf{1}_{[X_1 > \sqrt{t}]}(\omega)$$

et ainsi, comme c'est vrai pour tout ω :

$$\boxed{X_1 - \min(\sqrt{t}, X_1) \leq X_1\mathbf{1}_{[X_1 > \sqrt{t}]}.}$$

iii. On utilise la croissance de l'espérance dans la question précédente :

$$0 \leq \mu - E\left(\min\left(\sqrt{t}, X_1\right)\right) \leq E\left(X_1\mathbf{1}_{[X_1 > \sqrt{t}]}\right)$$

Il reste à prouver que $E\left(X_1\mathbf{1}_{[X_1 > \sqrt{t}]}\right) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ pour conclure par encadrement. Distinguons deux cas.

- Si X_1 est discrète, alors $E\left(X_1\mathbf{1}_{[X_1 > \sqrt{t}]}\right) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega), x \geq \sqrt{t}} xP\left(X = x\right) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ en tant que reste d'une série convergente puisque X admet une espérance.
- Si X_1 est à densité avec une densité f, même conclusion avec $\int_{\sqrt{t}}^{+\infty} xf(x)\d x$.

Par encadrement, on a donc :

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} E(\min(\sqrt{t}, X_1)) = \mu.}$$

iv. On a l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{\mu} - \frac{1}{t} \leq \frac{E(N_t)}{t} \leq \frac{t + \sqrt{t}}{tE(\min(\sqrt{t}, X_1))}.$$

Or :

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{\mu} - \frac{1}{t} = \frac{1}{\mu}$$

et :

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{t + \sqrt{t}}{tE(\min(\sqrt{t}, X_1))} = \frac{1}{\mu}$$

d'après la question précédente. Donc par encadrement, on a bien :

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} \frac{E(N_t)}{t} = \frac{1}{\mu}.}$$