

MATHS APPRO - CONCOURS BLANC 2

Vendredi 14/03/2025 - 4h

Calculatrice interdite

1. Les exercices sont indépendants.
2. La notation des copies tiendra compte de la qualité de la rédaction.
3. Si vous repérez ce qui vous pensez être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant vos initiatives.
4. Encadrez ou soulignez vos résultats.
5. Rendez les différents exercices sur des **copies séparées**.

Dans tout le sujet, on suppose que les bibliothèques *Python* sont importées comme suit :

```
1 import numpy as np
import numpy.random as rd
```

Exercice 1 - EDHEC Approfondies 2023 (Exercice 2)

On désigne par c un réel strictement supérieur à 2 et on suppose que toutes les variables aléatoires rencontrées dans cet exercice, sont définies sur le même espace probabilisé.

Partie I - étude d'une loi de probabilité.

On considère la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^{c+1}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$

1. Montrer que f peut être considérée comme une densité.

On considère dans la suite une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = [1, +\infty[$, de densité f et on note F sa fonction de répartition. On dit que X suit une loi de Pareto de paramètre c .

2. Montrer que X possède une espérance et une variance et les déterminer.
3. Déterminer, pour tout réel x , l'expression de $F(x)$ en fonction de x et c .
4. On pose $Y = \ln X$ et on admet que Y est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X . On note G sa fonction de répartition.
 - (a) Pour tout réel x , exprimer $G(x)$ à l'aide de F .
 - (b) En déduire que Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
 - (c) Écrire une fonction *Python* d'en-tête **def simulX(c)** utilisant **rd.exponential** et permettant de simuler X .

Partie II - produit de deux variables suivant la loi de Pareto de paramètre c .

On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes et suivant toutes les deux la loi de Pareto de paramètre c . On pose $Y_1 = \ln X_1$, $Y_2 = \ln X_2$ et $Z = X_1 X_2$.

5. Écrire une fonction *Python* d'en-tête **def simulZ(c)** utilisant la fonction **simulX(c)** et permettant de simuler Z .
6. Déterminer l'espérance et le moment d'ordre 2 de Z puis vérifier que la variance de Z est donnée par :

$$V(Z) = \frac{c^2(2c^2 - 4c + 1)}{(c - 2)^2(c - 1)^4}.$$

7. (a) Donner la loi commune suivie par cY_1 et cY_2 .
- (b) En déduire la loi de $cY_1 + cY_2$.

8. (a) Soit H la fonction de répartition de $Y_1 + Y_2$ et K celle de $cY_1 + cY_2$. Pour tout réel x , exprimer $H(x)$ à l'aide de K , puis vérifier qu'une densité de $Y_1 + Y_2$ est la fonction h définie par :

$$h(x) = \begin{cases} c^2 x e^{-cx} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

- (b) Soit F_Z la fonction de répartition de Z . Exprimer, pour tout réel, $F_Z(x)$ à l'aide de H . En déduire qu'une densité f_Z de Z est donnée par :

$$f_Z(x) = \begin{cases} \frac{c^2 \ln x}{x^{c+1}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}.$$

9. (a) Pour tout réel α strictement supérieur à 1, montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} dx$ converge et donner sa valeur.
 (b) Retrouver alors les valeurs de $E(Z)$ et $V(Z)$ déterminées à la question 6.

Exercice 2 - EDHEC ECS 2020 (Exercice 1 - adapté)

Soit f la fonction définie par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = x e^{x(y^2 + z^2 + 1)}.$$

- Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$.
- Déterminer le seul point critique A de f .
- (a) Calculer les valeurs des dérivées partielles d'ordre 2 de f en A .
 (b) Former la hessienne de f au point A et vérifier qu'elle est diagonale. Montrer que f présente un minimum local en A . Préciser la valeur de ce minimum.
- (a) Montrer que, pour tout (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) \geq x e^x$.
 (b) Que peut-on en déduire pour le minimum de f trouvé à la question 3b ?
- On souhaite étudier les extrema de f sous la contrainte linéaire $(C) : \begin{cases} x = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$. Montrer que, sous la contrainte (C) , f présente un minimum global au point $(1, 0, 0)$. Quelle est sa valeur ?
- On souhaite maintenant étudier les extrema de f sous la contrainte $(C') : x(y^2 + z^2 + 1) = 1$.
 (a) Après avoir justifié que $y^2 + z^2 + 1 \neq 0$, étudier la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$g(y, z) = \frac{e}{1 + y^2 + z^2}.$$

Montrer que g atteint un maximum global et indiquer sa valeur et en quel point il est atteint.

- (b) En déduire que f possède un maximum global sous la contrainte (C') . En quel point est-il atteint ? Quelle est sa valeur ?

Exercice 3 - EDHEC ECS 2021 (Exercice 3)

On considère un espace euclidien E pour lequel le produit scalaire de deux vecteurs x et y est noté $\langle x, y \rangle$, tandis que la norme du vecteur x est notée $\|x\|$. Le vecteur nul de E est noté 0_E .

On considère aussi un endomorphisme f de E , différent de l'endomorphisme nul, et antisymétrique, c'est-à-dire qu'il vérifie :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle.$$

- Montrer que : $\forall x \in E, \langle f(x), x \rangle = 0$.
- Établir l'égalité : $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = E$.
- On pose $s = f \circ f$. Montrer que s est un endomorphisme symétrique de E et que ses valeurs propres sont toutes dans $\mathbb{R}_-$.

4. On note g l'application qui à tout vecteur x de $\text{Im}(f)$ associe $g(x) = f(x)$ et on pose $t = g \circ g$.

- (a) Montrer que g est un endomorphisme antisymétrique de $\text{Im}(f)$.
- (b) En déduire que les valeurs propres de t sont toutes dans $\mathbb{R}_+^*$.

Dans les deux questions suivantes, on considère une valeur propre λ de t et on note $E_\lambda(t)$ le sous-espace propre associé à cette valeur propre.

5. On considère un vecteur e_1 non nul de $E_\lambda(t)$.

- (a) Montrer que $(e_1, g(e_1))$ est une famille d'éléments de $E_\lambda(t)$, orthogonale et libre.
- (b) En déduire, en considérant l'orthogonal F_2 de $\text{Vect}(e_1, g(e_1))$ dans $E_\lambda(t)$, que la dimension de $E_\lambda(t)$ est paire et qu'il existe un entier naturel p non nul, ainsi que p vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_p$ de $E_\lambda(t)$, tels que $(e_1, g(e_1), e_2, g(e_2), \dots, e_p, g(e_p))$ soit une base orthogonale de $E_\lambda(t)$.

6. Soit k un entier de $\llbracket 1, p \rrbracket$.

- (a) Montrer que l'on a : $\|g(e_k)\|^2 = -\lambda\|e_k\|^2$.
- (b) On considère les vecteurs $e'_k = \frac{1}{\|e_k\|}e_k$ et $e''_k = \frac{1}{\|g(e_k)\|}g(e_k)$.
Établir que $g(e'_k) = \sqrt{-\lambda}e''_k$ et $g(e''_k) = -\sqrt{-\lambda}e'_k$.

7. (a) Montrer que le rang de f est pair.

- (b) On pose $r = \frac{1}{2}\text{rg}(f)$. Déduire des questions précédentes qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E et r réels $a_1, \dots, a_r$ strictement positifs, pas nécessairement distincts, tels que la matrice M de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & & \\ a_1 & 0 & & & & \\ & & 0 & -a_2 & & (0) \\ & & a_2 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 & -a_r \\ & & & & & a_r & 0 \\ & & (0) & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & & \\ a_1 & 0 & & & & \\ & & 0 & -a_2 & & (0) \\ & & a_2 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 & -a_r \\ & & (0) & & & & a_r & 0 \end{pmatrix}$$

Problème 4 - Ecrimage ECS 2021 (Problème)

Soit a un réel strictement positif.

On considère dans toute la suite du problème une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes et identiquement distribuées, toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et suivant toutes la loi uniforme sur l'intervalle $[0, a]$.

L'objectif de ce problème est d'étudier puis de comparer deux estimateurs de a .

Les parties I et II de ce problème sont indépendantes.

Partie I - Estimateur du maximum de vraisemblance.

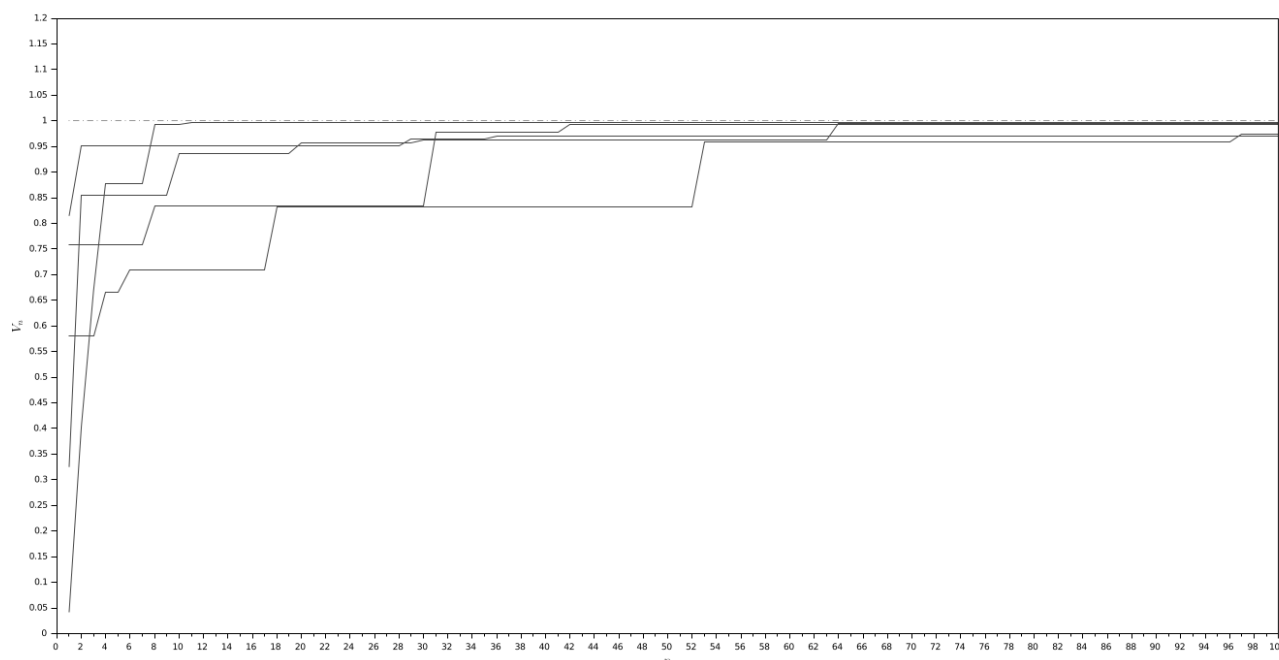
On note pour tout $n \geq 1$, $V_n = \max(X_1, \dots, X_n)$, appelé *estimateur de a du maximum de vraisemblance*.

1. (a) On rappelle qu'avec `numpy`, l'instruction `rd.random(n)` renvoie un tableau à n colonnes où chaque coefficients simule une loi uniforme sur $[0, 1]$.

Écrire une fonction d'en-tête **def uniforme(a,b,n)** : prenant en entrée deux réels a et b avec $a < b$ et un entier naturel non nul n qui renvoie un tableau `numpy` dont les coefficients simulent la loi uniforme $[a, b]$.

- (b) En utilisant la fonction précédente, écrire une fonction d'en-tête **def sim_V(n,a)** : prenant en entrée un entier naturel non nul n et un réel a strictement positif, et qui renvoie une réalisation de V_n .
- (c) On a tracé en figure 1 cinq réalisations mutuellement indépendantes de $(V_1, V_2, \dots, V_{100})$, dans le cas où $a = 1$. À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer sur l'estimateur V_n ?

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

FIGURE 1 – Cinq évolutions de $(V_1, V_2, \dots, V_{100})$ pour $a = 1$.

- (a) Rappeler l'expression de la fonction de répartition de X_1 , suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([0, a])$.
- (b) Déterminer la fonction de répartition F_n de V_n .
- (c) En déduire que V_n est une variable aléatoire à densité et donner une densité de V_n .
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que V_n admet une espérance et déterminer l'espérance de V_n . L'estimateur de V_n est-il sans biais ?
4. Soit $\epsilon > 0$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\mathbb{P}(|V_n - a| \geq \epsilon)$ en fonction de F_n , de a et de ϵ .
L'estimateur V_n est-il convergent ?
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel t , exprimer $\mathbb{P}(n(a - V_n) \leq t)$ à l'aide de F_n .
En déduire que la suite $(n(a - V_n))_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on identifiera la loi et son(s) paramètre(s).
6. Soit $\alpha \in]0, 1[$. Déterminer à partir de la question précédente un intervalle de confiance asymptotique de niveau de confiance $1 - \alpha$ pour le paramètre a , construit à l'aide de V_n .
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
 - (a) Montrer que V_n admet un moment d'ordre 2, que l'on déterminera.
 - (b) Montrer que $\mathbb{E}((V_n - a)^2)$ vaut $\frac{2a^2}{(n+1)(n+2)}$.
Quel résultat précédemment établi cela permet-il de retrouver ?

On pourra appliquer l'inégalité de Markov.

Partie II - Méthode des moments.

Pour un entier $n \geq 1$, on note $\overline{X}_n$ la moyenne empirique de l'échantillon $(X_1, \dots, X_n)$, c'est-à-dire :

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}.$$

On note $M_n = 2\overline{X}_n$, appelé *estimateur de a par la méthode des moments*.

8. Écrire une fonction d'en-tête **def sim_M(n,a)** : qui, prenant en entrée un entier naturel non nul n et le réel $a > 0$, renvoie une réalisation de la variable aléatoire M_n .
9. Déterminer l'espérance et la variance de $\overline{X}_n$. En déduire que M_n est un estimateur sans biais.
10. Calculer $V(M_n)$. M_n est-il un estimateur convergent ?
11. Justifier que la suite $(\sqrt{n}(M_n - a))_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi et le(s) paramètre(s).

12. Soit $\alpha \in]0, 1[$.

Déduire de la question précédente un intervalle de confiance asymptotique de niveau de confiance $1 - \alpha$ pour le paramètre a , construit sur M_n .

Quel intervalle de confiance vous semble meilleur entre ce dernier et celui déterminé à la question 6 ?

13. Calculer $\mathbb{E}((M_n - a)^2)$. Comparer au résultat obtenu à la question 7b.

Commenter ce résultat à l'aide de la figure 2.

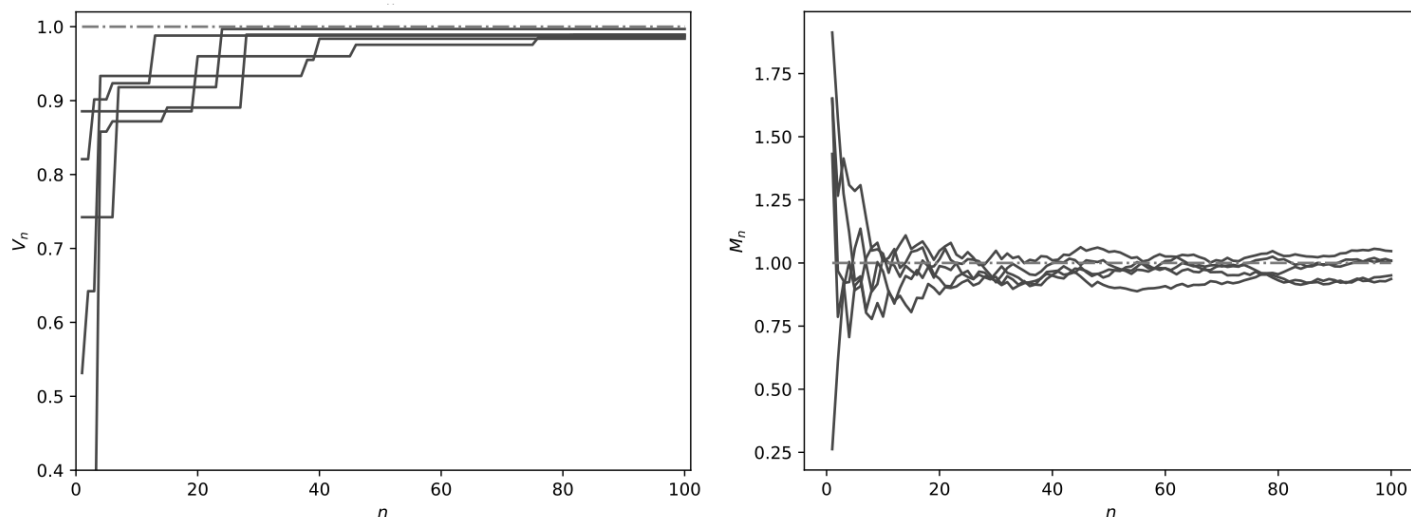


FIGURE 2 – Cinq évolutions de $(V_1, V_2, \dots, V_{100})$ (à gauche) et de $(M_1, M_2, \dots, M_{100})$ (à droite) pour $a = 1$.

Partie III - Consistance de ces estimateurs.

Dans les parties précédentes, nous avons montré que (V_n) convergeait « plus vite » vers a que (M_n) . Nous allons maintenant étudier la sensibilité de ces estimateurs à une perturbation, en supposant que la première mesure (X_1) est erronée.

Nous supposons donc toujours que les variables aléatoires X_i sont mutuellement indépendantes, mais nous supposons maintenant que :

- X_1 suit la loi uniforme sur $[0, 2a]$;
- si $i \geq 2$, X_i suit la loi uniforme sur $[0, a]$ (comme précédemment).

On considère toujours, pour tout entier $n \geq 1$: $V_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ et $M_n = 2\bar{X}_n = \frac{2}{n}(X_1 + \dots + X_n)$.

14. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel t de $]a, 2a]$, montrer que : $\mathbb{P}(V_n \leq t) = \frac{t}{2a}$.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la fonction de répartition de V_n .

La suite de variables aléatoires $(V_n)_{n \geq 1}$ converge-t-elle en loi ?

(c) Calculer $\mathbb{P}(V_n > \frac{3}{2}a)$.

L'estimateur V_n est-il toujours convergent ?

15. On pose pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $M'_n = \frac{2}{n-1}(X_2 + \dots + X_n)$.

On rappelle que la suite $(M'_n)_{n \geq 2}$ converge en probabilité vers a .

(a) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, exprimer M_n en fonction de X_1 , M'_n et n .

(b) En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$|M_n - a| \leq \frac{3a}{n} + |M'_n - a|.$$

(c) Soit $\epsilon > 0$ et soit n_0 un entier naturel supérieur ou égal à 2 tel que $\frac{3a}{n_0} < \epsilon$.

Pour tout entier n vérifiant $n \geq n_0$, comparer les événements $[|M'_n - a| < \epsilon]$ et $[|M_n - a| < 2\epsilon]$.

(d) La suite de variables aléatoires $(M_n)_{n \geq 2}$ converge-t-elle en probabilité vers a ?

16. Commenter les résultats de cette partie à partir des parties précédentes.