Maths Appro - Correction Concours Blanc 2

Exercice 1 - EDHEC Approfondies 2023 (Exercice 2)

Partie I - étude d'une loi de probabilité.

1. Vérifions que f est une densité :
   - $\boxed{f \text{ est continue}}$ par opérations sur les fonctions usuelles $\boxed{\text{sauf éventuellement en 1.}}$
   - $\boxed{f \text{ est bien positive sur } \mathbb{R}.}$
   - Sous réserve de convergence, on a : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{c}{x^{c+1}}\mathrm{d}x$.

     Or pour $A > 1$, on a :
     $$\int_1^A \frac{c}{x^{c+1}}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x^c}\right]_1^A = 1 - \frac{1}{A^c} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 1.$$
     Donc $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \text{ converge et vaut 1.}}$

   Donc $\boxed{f \text{ est bien une densité.}}$

2. X admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ converge absolument.
   Sous réserve de convergence absolue, on a :
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} x\frac{c}{x^{c+1}}\mathrm{d}x.$$
   Comme tout est positif, cela revient à la convergence usuelle.
   Or pour $A > 1$, on a :
   $$\int_1^A x\frac{c}{x^{c+1}}\mathrm{d}x = \left[-\frac{c}{c-1}\frac{1}{x^{c-1}}\right]_1^A = \frac{c}{c-1} - \frac{c}{(c-1)A^{c-1}} \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{c}{c-1}$$
   où la limite est vraie car $c > 2$ et donc $c > 1$.
   Donc $\boxed{X \text{ admet une espérance et } E(X) = \frac{c}{c-1}.}$
   De même, X admet un moment d'ordre 2 si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x$ converge absolument (d'après le théorème de transfert).
   Exactement de la même manière, on se ramène au calcul, pour $A > 1$ de :
   $$\int_1^A x^2\frac{c}{x^{c+1}}\mathrm{d}x = \left[-\frac{c}{c-2}\frac{1}{x^{c-2}}\right]_1^A = \frac{c}{c-2} - \frac{c}{(c-2)A^{c-2}} \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{c}{c-2}$$
   où la limite est vraie car $c > 2$.
   Donc $\boxed{X \text{ admet un moment d'ordre 2 et } E(X^2) = \frac{c}{c-2}.}$
   D'après la formule de Kœnig-Huygens, X admet donc une variance et :
   $$\boxed{V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{c}{c-2} - \left(\frac{c}{c-1}\right)^2 = \frac{c(c-1)^2 - c^2(c-2)}{(c-2)(c-1)^2} = \frac{c}{(c-2)(c-1)^2}.}$$

3. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t.$$
   Donc pour $x < 1$, on a $\boxed{F(x) = 0.}$ Et pour $x \geqslant 1$, on a :
   $$\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^1 0\mathrm{d}t + \int_1^x \frac{c}{t^{c+1}}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t^c}\right]_1^x = 1 - \frac{1}{x^c}.}$$

4. (a) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} G(x) &= P(Y \leqslant x) \\ &= P(\ln X \leqslant x) \\ &= P(X \leqslant \mathrm{e}^x) \\ &\quad \text{(car exp est une bijection croissante de } \mathbb{R} \text{ sur } \mathbb{R}_+^\star) \\ &= \boxed{F(\mathrm{e}^x).} \end{aligned}$$

(b) Ainsi, on a :

$$\boxed{G(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{(\mathrm{e}^x)^c} & \text{si } \mathrm{e}^x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } \mathrm{e}^x < 1 \end{cases} = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-cx} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.}$$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre c.

(c)

```python
def simulX(c):
    Y = rd.exponential(1/c)
    # rappel : numpy a la convention anglo-saxone
    # pour les paramètres de lois exponentielles
    X = np.exp(Y)
    return X
```

Partie II - produit de deux variables suivant la loi de Pareto de paramètre c.

5.

```python
def simulZ(c):
        X1 = simulX(c)
        X2 = simulX(c)
        Z = X1 * X2
        return Z
```

6. Comme X_1 et X_2 sont indépendants, Z admet une espérance et :

$$\boxed{E(Z) = E(X_1X_2) = E(X_1)E(X_2) = \left(\frac{c}{c-1}\right)^2.}$$

De même pour le moment d'ordre 2, d'après le lemme des coalitions X_1^2 et X_2^2 sont indépendants et donc :

$$\boxed{E(Z^2) = E(X_1^2X_2^2) = E(X_1^2)E(X_2^2) = \left(\frac{c}{c-2}\right)^2.}$$

D'après la formule de Kœnig-Huygens, Z admet donc une variance et :

$$\begin{aligned} V(Z) &= E(Z^2) - E(Z)^2 \\ &= \left(\frac{c}{c-2}\right)^2 - \left(\frac{c}{c-1}\right)^4 \\ &= \frac{c^2(c-1)^4 - c^4(c-2)^2}{(c-2)^2(c-1)^4} \\ &= \frac{2c^4 - 4c^3 + c^2}{(c-2)^2(c-1)^4} \\ &= \boxed{\frac{c^2(2c^2 - 4c + 1)}{(c-2)^2(c-1)^4}.} \end{aligned}$$

7. (a) Comme $Y_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(c)$, on a $cY_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\underbrace{c/c}_{=1})$.

   (b) Ainsi cY_1 et cY_2 suivent toutes deux une loi $\mathcal{E}(1)$, ce qui est la même loi que $\gamma(1)$.
   Donc par stabilité de la loi γ par somme de variables indépendantes, on a $\boxed{cY_1 + cY_2 \hookrightarrow \gamma(2).}$

8. (a) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} H(x) &= P(Y_1 + Y_2 \leqslant x) \\ &= P(cY_1 + cY_2 \leqslant cx) \\ &= K(cx). \end{aligned}$$

   On sait déjà que $Y_1 + Y_2$ est une variable à densité puisque c'est la transformation affine d'une variable à densité.
   Par transformation affine, on sait qu'une densité de $Y_1 + Y_2$ est donnée par $h(x) = ck(cx)$ où k est une densité de $cY_1 + cY_2$. Ainsi :

$$\boxed{h(x) = \begin{cases} c\frac{(cx)^{2-1}\mathrm{e}^{-cx}}{\Gamma(2)} & \text{si } cx > 0 \\ 0 & \text{si } cx \leqslant 0 \end{cases} = \begin{cases} c^2 x\mathrm{e}^{-cx} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}.}$$

   On a ici calculé $\Gamma(2)$ avec $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (b) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F_Z(x) = P(Z \leqslant x) = P(X_1 X_2 \leqslant x).$$

   Puisque X_1 et X_2 sont à valeurs dans $[1, +\infty[\subset \mathbb{R}_+^\star$, on peut distinguer deux cas.
   Si $x \leqslant 0$ alors $\boxed{F_Z(x) = 0.}$
   Si $x > 0$ alors :

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= P(X_1 X_2 \leqslant x) \\ &= P(\ln(X_1 X_2) \leqslant \ln(x)) \\ &\quad \text{(car ln est une bijection croissante de } \mathbb{R}_+^\star \text{ sur } \mathbb{R}) \\ &= P(\ln X_1 + \ln X_2 \leqslant \ln x) \\ &= P(Y_1 + Y_2 \leqslant \ln x) \\ &= \boxed{H(\ln(x)).} \end{aligned}$$

   Comme H est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$, on a F_Z $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}_+^\star$. F_Z est clairement $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}_-^\star$.
   De plus $\lim_{x \to 0^+} H(\ln(x)) = \lim_{y \to -\infty} H(y) = 0$ car H est une fonction de répartition.
   Donc F_Z est également continue en 0. $\boxed{\text{Ainsi } F_Z \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$
   Comme h est continue (vérification facile), c'est la dérivée de H en tout point et H est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi $\boxed{F_Z \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sauf éventuellement en } 0.}$
   Donc Z est à densité. Et pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, on a :

$$F_Z'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}h(\ln(x)) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{x}c^2(\ln x)\mathrm{e}^{-c\ln(x)} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{c^2 \ln x}{x^{c+1}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

   Ainsi une densité de Z est donnée par :

$$\boxed{f_Z(x) = \begin{cases} \frac{c^2 \ln x}{x^{c+1}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}.}$$

9. (a) On a :

$$x^{\frac{1+\alpha}{2}} \frac{\ln x}{x^\alpha} = x^{\frac{1-\alpha}{2}} \ln x \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

où la limite se trouve par croissance comparée. Donc :

$$\frac{\ln x}{x^\alpha} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{\frac{1+\alpha}{2}}}\right).$$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{1+\alpha}{2}}}\mathrm{d}x$ converge comme intégrale de Riemann convergente en $+\infty$ ($\frac{1+\alpha}{2} > 1$).

Comme l'intégrande est positive, par critère de négligeabilité, $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}\mathrm{d}x \text{ converge.}}$

Posons $A > 1$. Posons également $u(x) = \ln(x)$ et $v(x) = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$. u et v sont $\mathcal{C}^1$ et donc on peut procéder à une intégration par parties. On a :

$$\begin{aligned}
\int_1^A \frac{\ln x}{x^\alpha}\mathrm{d}x &= \int_1^A \underbrace{\ln(x)}_{=u(x)} \underbrace{\frac{1}{x^\alpha}}_{=v'(x)} \mathrm{d}x \\
&= \left[\underbrace{\ln(x)}_{=u(x)} \underbrace{\frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}}_{=v(x)}\right]_1^A - \int_1^A \underbrace{\frac{1}{x}}_{=u'(x)} \underbrace{\frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}}_{=v(x)} \mathrm{d}x \\
&= \frac{\ln(A)}{(1-\alpha)A^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha}\int_1^A \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x \\
&= \frac{\ln(A)}{(1-\alpha)A^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}\right]_1^A \\
&= \underbrace{\frac{\ln(A)}{(1-\alpha)A^{\alpha-1}}}_{\xrightarrow[A\to+\infty]{}0 \text{ (par c.c.)}} + \frac{1}{(1-\alpha)^2} - \underbrace{\frac{1}{(1-\alpha)^2A^{\alpha-1}}}_{\xrightarrow[A\to+\infty]{}0} \\
&\xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{1}{(1-\alpha)^2}.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}\mathrm{d}x = \frac{1}{(1-\alpha)^2}.}$$

(b) On sait déjà que Z admet une espérance et une variance. On sait donc déjà que les intégrales suivantes convergent.

On a :

$$\begin{aligned}
E(Z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_Z(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_1^{+\infty} x\frac{c^2\ln x}{x^{c+1}}\mathrm{d}x \\
&= c^2\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^c}\mathrm{d}x \\
&= c^2\left(\frac{1}{1-c}\right)^2 \\
&= \boxed{\left(\frac{c}{c-1}\right)^2.}
\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} E(Z^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_Z(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_1^{+\infty} x^2 \frac{c^2 \ln x}{x^{c+1}}\mathrm{d}x \\ &= c^2 \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{c-1}}\mathrm{d}x \\ &= c^2 \left(\frac{1}{1-(c-1)}\right)^2 \\ &= \boxed{\left(\frac{c}{c-2}\right)^2.} \end{aligned}$$

Et donc d'après la formule de Kœnig-Huygens :

$$\boxed{V(Z) = \left(\frac{c}{c-2}\right)^2 - \left(\frac{c}{c-1}\right)^2 = \frac{c^2(2c^2-4c+1)}{(c-2)^2(c-1)^4}.}$$

Exercice 2 - EDHEC ECS 2020 (Exercice 1 - adapté)

1. La fonction $(x,y,z) \mapsto x(y^2+z^2+1)$ définie sur $\mathbb{R}^3$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est polynomiale donc $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
   La fonction exp est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Donc par composition :

   $$\left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & \mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)} \end{array}\right.$$

   est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$.
   La fonction $(x,y,z) \mapsto x$ est $\mathcal{C}^2$ (c'est une fonction coordonnée). Donc par produit $\boxed{f \text{ est } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}^3.}$
2. f est $\mathcal{C}^2$ donc admet des dérivées partielles. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

   $$\begin{aligned} (x,y,z) \text{ pt critique de } f &\Leftrightarrow \nabla f(x,y,z) = (0,0,0) \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \partial_1 f(x,y,z) &=& 0 \\ \partial_2 f(x,y,z) &=& 0 \\ \partial_3 f(x,y,z) &=& 0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} (1+(y^2+z^2+1)x)\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)} &=& 0 \\ 2x^2y\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)} &=& 0 \\ 2x^2z\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)} &=& 0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 1+(y^2+z^2+1)x &=& 0 \\ x^2y &=& 0 \\ x^2z &=& 0 \end{array}\right. \end{aligned}$$

   La première équation implique $x \neq 0$ (sinon on a $1=0$). Donc :

   $$(x,y,z) \text{ pt critique de } f \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 1+(y^2+z^2+1)x &=& 0 \\ y &=& 0 \\ z &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -1 \\ x^2y &=& 0 \\ x^2z &=& 0 \end{array}\right.$$

   Donc $\boxed{\text{l'unique point critique de } f \text{ est } (-1,0,0).}$
3. (a) f est $\mathcal{C}^2$ donc admet des dérivées partielles d'ordre 2.
   De plus, comme f est $\mathcal{C}^2$, le théorème de Schwarz s'applique et on a pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

   $$\begin{aligned} \partial_{1,2} f(x,y,z) &= \partial_{2,1} f(x,y,z), \\ \partial_{1,3} f(x,y,z) &= \partial_{3,1} f(x,y,z), \\ \partial_{2,3} f(x,y,z) &= \partial_{3,2} f(x,y,z). \end{aligned}$$

Calculons les 6 dérivées secondes indépendantes :

$$\begin{aligned}
\partial_{1,1} f(x,y,z) &= (y^2+z^2+1)\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)} + (1+(y^2+z^2+1)x)(y^2+z^2+1)\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)} \\
&= \boxed{(2+(y^2+z^2+1))(y^2+z^2+1)\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)},} \\
\partial_{1,2} f(x,y,z) &= 4xy\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)} + 2x^2y(y^2+z^2+1)\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)} = \boxed{2xy(2+x(y^2+z^2+1))\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)},} \\
\partial_{1,3} f(x,y,z) &= 4xz\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)} + 2x^2z(y^2+z^2+1)\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)} = \boxed{2xz(2+x(y^2+z^2+1))\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)},} \\
\partial_{2,2} f(x,y,z) &= 2x^2\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)} + 2x^2y \times 2xy\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)} = \boxed{2x^2(1+2xy^2)\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)},} \\
\partial_{2,3} f(x,y,z) &= \boxed{4x^2yz\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)},} \\
\partial_{3,3} f(x,y,z) &= 2x^2\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)} + 2x^2z \times 2xz\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)} = \boxed{2x^2(1+2xz^2)\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)}.}
\end{aligned}$$

(b) Au point $(-1,0,0)$, on a donc :

$$\boxed{\nabla^2 f(-1,0,0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mathrm{e}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\mathrm{e}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\mathrm{e}} \end{pmatrix}.}$$

La hessienne de f en $(-1,0,0)$ est bien diagonale. On a donc :

$$\mathrm{Sp}(\nabla^2 f(-1,0,0)) = \{1/\mathrm{e}, 2/\mathrm{e}\} \subset \mathbb{R}_+^\star.$$

Ainsi $\boxed{f \text{ admet un minimum local au point critique } (-1,0,0).}$
On a de plus :

$$\boxed{f(-1,0,0) = -\frac{1}{\mathrm{e}}.}$$

4. (a) On a pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a $y^2+z^2+1 \geqslant 1$.

- Si $x \geqslant 0$, on a $x(y^2+z^2+1) \geqslant x$. Puis par croissance de l'exponentielle, on a : $\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)} \geqslant \mathrm{e}^x$.
Puis par produit par $x \geqslant 0$, on a :
$$\boxed{f(x,y,z) \geqslant x\mathrm{e}^x.}$$

- Si $x < 0$, on a $x(y^2+z^2+1) \leqslant x$. Puis par croissance de l'exponentielle, on a : $\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)} \leqslant \mathrm{e}^x$.
Puis par produit par $x < 0$, on a :
$$\boxed{f(x,y,z) \geqslant x\mathrm{e}^x.}$$

(b) On étudie rapidement la fonction $h : x \mapsto x\mathrm{e}^x$. h est $\mathcal{C}^1$ par opérations sur les fonctions usuelles. On a de plus pour $x \in \mathbb{R}$:

$$h'(x) = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = (1+x)\mathrm{e}^x.$$

Donc $h'(x) > 0 \Leftrightarrow x > -1$. Et donc, on a le tableau de variation :

t	$-\infty$		-1		$+\infty$
$h'(t)$		$-$	0	$+$	
$h(t)$		$\searrow$	$h(-1) = -\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\nearrow$	

Donc h admet un minimum global de $-\frac{1}{\mathrm{e}}$.
On en déduit que pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\boxed{f(x,y,z) \geqslant x\mathrm{e}^x \geqslant -\frac{1}{\mathrm{e}}}$$

et donc $\boxed{f \text{ admet un minimum global en } (-1,0,0).}$

5. On pourrait étudier les points critiques de f sous contraintes mais ce n'est pas utile : on nous donne le potentiel point critique.
On cherche donc à étudier le signe de $f(x,y,z) - f(1,0,0)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathcal{C}$.
On a pour $(x,y,z) \in \mathcal{C}$:
$$f(x,y,z) - f(1,0,0) = 1 \times \mathrm{e}^{1\times(y^2+(-y)^2+1)} - 1 \times \mathrm{e}^{1\times(0^2+0^2+1)} = \mathrm{e}^{1+2y^2} - \mathrm{e}^1.$$
Comme $1 + 2y^2 \geqslant 1$, par croissance de exp, on a $\boxed{f(x,y,z) - f(1,0,0) \geqslant 0.}$
Ainsi $\boxed{f \text{ atteint bien un minimum global en } (1,0,0) \text{ sous la contrainte } \mathcal{C}.}$ De plus $\boxed{f(1,0,0) = \mathrm{e}.}$

6. (a) On a $y^2 + z^2 \geqslant 0$ et donc $\boxed{y^2 + z^2 + 1 \neq 0.}$
g est clairement $\mathcal{C}^1$ comme inverse d'une fonction polynomiale à valeurs dans $\mathbb{R}^\star$.
Soit $(y,z) \in \mathbb{R}^2$. On a :
$$(x,y) \text{ point critique de } g \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -\frac{2\mathrm{e}y}{(1+y^2+z^2)^2} & = & 0 \\ -\frac{2\mathrm{e}z}{(1+y^2+z^2)^2} & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$
Donc g admet un unique point critique en $(0,0)$.
On pourrait calculer les dérivées secondes, mais cela ne nous donnera que des renseignements locaux.
Regardons plutôt pour $(y,z) \in \mathbb{R}^2$:
$$g(y,z) - g(0,0) = \frac{\mathrm{e}}{1+y^2+z^2} - \frac{\mathrm{e}}{1} = \frac{\mathrm{e}(1-(1+y^2+z^2))}{1+y^2+z^2} = -\frac{y^2+z^2}{1+y^2+z^2} \leqslant 0.$$
Donc $\boxed{g \text{ atteint un maximum global en } (0,0).}$ On a de plus $\boxed{g(0,0) = \mathrm{e}.}$

(b) On a pour tout $(x,y,z) \in C'$, $f(x,y,z) = g(y,z)$. Donc les valeurs atteintes par f sur C' sont les valeurs atteintes par g sur $\mathbb{R}^2$.
On en déduit que $\boxed{f \text{ atteint un minimum global de valeur e en } y=0 \text{ et } z=0 \text{ et donc } x=1 \text{ (car sur } C').}$

Exercice 3 - EDHEC ECS 2021 (Exercice 3)

1. On a pour tout $x, y \in E$:
$$\langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle.$$
En particulier pour $y = x$, on a :
$$\langle f(x), x\rangle = -\langle x, f(x)\rangle.$$
Comme $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est symétrique, on a $\langle f(x), x\rangle = -\langle f(x), x\rangle$ et donc :
$$\boxed{\langle f(x), x\rangle = 0.}$$

2. Montrons que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont en somme directe.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. Ainsi $f(x) = 0_E$ et il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$. Montrons que $x = 0_E$.
On a :
$$\langle \underbrace{f(x)}_{=0_E}, y\rangle = -\langle x, \underbrace{f(y)}_{=x}\rangle.$$
Et donc $\boxed{x = 0_E.}$
Ainsi $\boxed{\mathrm{Ker}(f) \text{ et } \mathrm{Im}(f) \text{ sont en somme directe.}}$
De plus, on a d'après le théorème du rang :
$$\dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = \dim E.$$
Donc par égalité des dimensions, $\boxed{\mathrm{Ker}(f) \text{ et } \mathrm{Im}(f) \text{ sont supplémentaires,}}$ c'est-à-dire :
$$\boxed{\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E.}$$

3. Soient $x, y \in E$. On a :

$$\begin{aligned} \langle s(x), y\rangle &= \langle f \circ f(x), y\rangle \\ &\underset{f \text{ antisymétrique}}{=} -\langle f(x), f(y)\rangle \\ &\underset{f \text{ antisymétrique}}{=} -\Big(-\langle x, f\circ f(y)\rangle\Big) \\ &= \boxed{\langle x, s(y)\rangle.} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{s \text{ est symétrique.}}$
Maintenant, soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(s)$. Soit $x \in E$ un vecteur propre associé. Calculons maintenant :

$$\underbrace{\langle f(x), f(x)\rangle}_{\geqslant 0} = -\langle x, s(x)\rangle = -\langle x, \lambda x\rangle = -\lambda \underbrace{\|x\|^2}_{\geqslant 0}.$$

Donc $\boxed{\lambda \leqslant 0.}$
On a donc bien $\boxed{\mathrm{Sp}(s) \subset \mathbb{R}_-.}$

4. (a) Comme pour tout $x \in \mathrm{Im}(f)$, on a $g(x) = f(x) \in \mathrm{Im}(f)$, on a bien $\boxed{\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(f).}$
De plus, $\boxed{g \text{ est clairement linéaire}}$ puisque f l'est.
Donc $\boxed{g \text{ est un endomorphisme de } \mathrm{Im}(f).}$
(b) On sait déjà d'après les questions précédentes que $\boxed{\mathrm{Sp}(t) \subset \mathbb{R}_-.}$
Il reste à montrer que $0 \notin \mathrm{Sp}(t)$.
Soit $x \in \mathrm{Im}(f)$ tel que $g(x) = 0 \times x$. Montrons que $x = 0_E$ (ce n'est donc pas un vecteur propre car il n'est pas non-nul).
Comme $g(x) = f(x)$, cela implique $f(x) = 0_E$ puis $x \in \mathrm{Ker}(f)$.
D'où $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$ car la somme est directe. D'où $\boxed{x = 0_E}$.
Donc $\boxed{0 \notin \mathrm{Sp}(t)}$ et $\boxed{\mathrm{Sp}(t) \subset \mathbb{R}_-^\star.}$

5. (a) $e_1 \in E_\lambda(t)$ par définition. Montrons que $g(e_1) \in E_\lambda(t)$.
On a :

$$t(g(e_1)) = g \circ g \circ g(e_1) = g \circ t(e_1) = g(\lambda e_1) = \lambda g(e_1).$$

Donc $\boxed{g(e_1) \in E_\lambda(t).}$
Montrons que la famille est orthogonale. On a :

$$\langle e_1, g(e_1)\rangle = 0$$

car g est antisymétrique. $\boxed{\text{Donc la famille est orthogonale.}}$
Une famille orthogonale est libre si et seulement si aucun des vecteurs de la famille n'est nulle. On a $e_1 \neq 0_E$ par hypothèse.
De plus, si $g(e_1) = 0_E$, alors $t(e_1) = g \circ g(e_1) = 0_E$ et donc $\lambda = 0$. Or $\mathrm{Sp}(t) \subset \mathbb{R}_-^\star$. Donc $\boxed{g(e_1) \neq 0_E.}$
Ainsi $\boxed{(e_1, g(e_1)) \text{ est une famille orthogonale libre de } E_\lambda(t).}$
(b) Soit F_2 l'orthogonale de $\mathrm{Vect}(e_1, g(e_1))$ dans $E_\lambda(t)$. Si $\dim F_2 = 0$, alors la propriété à démontrer est vraie.
Sinon, il existe $e_2 \in F_2$ non nul également vecteur propre pour la valeur propre λ. D'après la question précédente, $(e_2, g(e_2))$ est une famille orthogonale libre de $E_\lambda(t)$. Montrons que c'est en fait une famille de F_2.
On a déjà $e_2 \in F_2$ par construction. Montrons que $g(e_2) \in F_2$. Pour cela montrons que $g(e_2)$ est orthogonal à e_1 et $g(e_1)$.
On a :

$$\langle g(e_2), e_1\rangle = -\langle \underbrace{e_2}_{\in F_2}, g(e_1)\rangle = 0$$

et :

$$\langle g(e_2), g(e_1)\rangle = -\langle \underbrace{e_2}_{\in F_2}, t(e_1)\rangle = -\lambda\langle \underbrace{e_2}_{\in F_2}, e_1\rangle = 0.$$

Donc $(e_2, g(e_2))$ est une famille orthogonale libre de F_2.

On peut alors réitérer le processus : on pose F_3 l'orthogonal de $\mathrm{Vect}(e_2, g(e_2))$ dans F_2. À nouveau, on pose $e_3 \in F_3$ avec $e_3 \not= 0_E$ si $\dim F_3 \neq 0$. On sait que $(e_3, g(e_3))$ est une famille orthogonale libre de F_2 et on prouve que c'est famille orthogonale libre de F_3. Et ainsi de suite.

Le processus s'arrête lorsque l'on rencontre un F_{p+1} de dimension 0. On a alors p vecteurs e_i et p vecteurs $g(e_i)$ tels que $(e_i, g(e_i))$ soit une base orthogonale de $\mathrm{Vect}(e_i, g(e_i))$ et :

$$\mathrm{E}_\lambda(t) = \mathrm{Vect}(e_1, g(e_1)) \oplus \mathrm{Vect}(e_2, g(e_2)) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Vect}(e_p, g(e_p)).$$

et où les espaces vectoriels $\mathrm{Vect}(e_i, g(e_i))$ sont orthogonaux.

Ainsi $\boxed{(e_1, g(e_1), e_2, g(e_2), \dots, e_p, g(e_p)) \text{ est une base orthogonale de } E_\lambda(t).}$

Et donc $\boxed{\dim E_\lambda(t) \text{ est paire de dimension } 2p.}$

6. (a) On a :

$$\begin{aligned} \|g(e_k)\|^2 &= \langle g(e_k), g(e_k)\rangle \\ &\underset{g \text{ antisymétrique}}{=} -\langle e_k, g\circ g(e_k)\rangle \\ &= -\langle e_k, t(e_k)\rangle \\ &= -\langle e_k, \lambda e_k\rangle \\ &= \boxed{-\lambda\|e_k\|^2.} \end{aligned}$$

(b) On a :

$$\begin{aligned} g(e'_k) &= g\left(\frac{1}{\|e_k\|}e_k\right) \\ &= \frac{1}{\|e_k\|}g(e_k) \\ &= \frac{\|g(e_k)\|}{\|e_k\|} \times \frac{1}{\|g(e_k)\|}g(e_k) \\ &= \frac{\|g(e_k)\|}{\|e_k\|}e''_k. \end{aligned}$$

Or $\|g(e_k)\| = \sqrt{-\lambda\|e_k\|^2} = \sqrt{-\lambda}\|e_k\|$. Donc :

$$\boxed{g(e'_k) = \sqrt{-\lambda}e''_k.}$$

De même :

$$\begin{aligned} g(e''_k) &= g\left(\frac{1}{\|g(e_k)\|}g(e_k)\right) \\ &= \frac{1}{\|g(e_k)\|}t(e_k) \\ &= \frac{1}{\sqrt{-\lambda}\|e_k\|}\lambda e_k \\ &= -\frac{(-\lambda)}{\sqrt{-\lambda}} \times \frac{1}{\|e_k\|}e_k \\ &= \boxed{-\sqrt{-\lambda}e'_k.} \end{aligned}$$

7. (a) t est endomorphisme symétrique de $\mathrm{Im}(f)$. Il est donc diagonalisable. On a ainsi :

$$\mathrm{Im}(f) = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(t)} E_\lambda(t).$$

Or on a montré que $\dim E_\lambda(t)$ est paire. Donc $\dim \mathrm{Im}(f)$ l'est aussi.

D'où $\boxed{\mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{Im}(f) \text{ est pair.}}$

(b) On pose $r = \frac{1}{2}\mathrm{rg}(f)$.

Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(t)$, la famille $(e_1', e_1'', e_2', e_2'', \ldots, e_p', e_p'')$ est la normalisation de la famille $(e_1, g(e_1), e_2, g(e_2), \ldots, e_r, g$
et est donc une base orthonormée de $E_\lambda(t)$.

La matrice de la restriction de g (et donc de f) à $E_\lambda(t)$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & -a & & & & & \\ a & 0 & & & & & \\ & & 0 & -a & & & \\ & & a & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & -a \\ & & & & & a & 0 \end{pmatrix}$$

où $a = \sqrt{-\lambda} > 0$ puisque $g(e_k') = \sqrt{-\lambda} e_k''$ et $g(e_k'') = -\sqrt{-\lambda} e_k'$.

La concaténation de ces bases pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(t)$ est une base de orthonormée de $\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(t)} E_\lambda(t)$ car les espaces propres de t sont orthogonaux deux à deux (car t est symétrique).

r est alors le nombre total de e_k' différents dans cette base.

On a alors la matrice de g (et donc de la restriction de f à $\mathrm{Im}(f)$) de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & & & \\ a_1 & 0 & & & & & \\ & & 0 & -a_2 & & & \\ & & a_2 & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & -a_r \\ & & & & & a_r & 0 \end{pmatrix}$$

où les $a_i > 0$.

Remarquons maintenant que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont non seulement en somme directe mais également orthogonaux. En effet, pour $x \in \mathrm{Ker}(f)$ et $y \in \mathrm{Im}(f)$ avec $y = f(z)$, on a :

$$\langle x, y \rangle = \langle x, f(z) \rangle = -\langle \underbrace{f(x)}_{=0_E}, z \rangle = 0.$$

Soit maintenant une base orthonormée de $\mathrm{Ker}(f)$. Sa concaténation avec la base orthonormée de $\mathrm{Im}(f)$ trouvée précédemment est alors une base orthonormée de E.

Et dans cette base, on a la matrice de f :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & & & & & & \\ a_1 & 0 & & & & & & & & \\ & & 0 & -a_2 & & & & (0) & & \\ & & a_2 & 0 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & 0 & -a_r & & & \\ & & & & & a_r & 0 & & & \\ & & & (0) & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}}$$

ou éventuellement :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & & & \\ a_1 & 0 & & & & & \\ & & 0 & -a_2 & & (0) & \\ & & a_2 & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & (0) & & & 0 & -a_r \\ & & & & & a_r & 0 \end{pmatrix}}$$

si $\mathrm{Ker}(f)$ est réduit à $\{0_E\}$.

Problème 4 - Ecricome ECS 2021 (Problème)

Partie I - Estimateur du maximum de vraisemblance.

1. (a) En utilisant une transformation affine, on peut écrire :

```python
def uniforme(a,b,n):
    return (b-a)*np.random(n) + a
```

(b)

```python
def sim_V(n,a):
    return np.max(uniforme(0,a,n))
```

(c) Toutes les courbes semblent tendre vers 1. Ainsi, on peut conjecturer que V_n est un estimateur convergent de a.

On peut aussi remarquer que les courbes sont systématiques inférieures à 1. On peut donc aussi conjecturer que V_n sera un estimateur biaisé (négativement).

2. (a) En notant F_{X_1} la fonction de répartition de X_1, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{F_{X_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \frac{x}{a} & \text{si } x \in [0, a], \\ 1 & \text{si } x > a. \end{cases}}$$

(b) V_n est bien une variable aléatoire car $\max : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}^n$. On note F_n sa fonction de répartition.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \mathbb{P}(V_n \leqslant x) \\ &= \mathbb{P}(\max(X_1, \dots, X_n) \leqslant x) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k \leqslant x]\right) \\ &\quad \text{(le max est majoré ssi ils sont tous majorés)} \\ &= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k \leqslant x) \\ &\quad \text{(indépendance mutuelle des } X_k\text{)} \\ &= (F_{X_1}(x))^n \\ &\quad \text{(loi commune des } X_k\text{)} \\ &= \boxed{\begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \left(\frac{x}{a}\right)^n & \text{si } x \in [0, a] \\ 1 & \text{si } x > a \end{cases}.} \end{aligned}$$

(c) La fonction de répartition obtenue est clairement $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0[$, $]0,a[$ et $]a,+\infty[$.
De plus, $\lim_{x\to 0^-} F_n(x) = 0 = \lim_{x\to 0^+} F_n(x)$ et $\lim_{x\to a^-} F_n(x) = 1 = \lim_{x\to a^+} F_n(x)$ et donc F_n est même $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$.
Donc $\boxed{V_n \text{ est une variable à densité.}}$
De plus, pour $x \in \mathbb{R}\setminus\{0,a\}$, on a :

$$F_n'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin]0,a[, \\ n\frac{x^{n-1}}{a^n} & \text{si } x \in]0,a[. \end{cases}$$

Donc la fonction :

$$\boxed{f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [0,a] \\ n\frac{x^{n-1}}{a^n} & \text{si } x \in [0,a] \end{cases} \end{array} \right.}$$

est une densité de V_n.

3. V_n admet une espérance si et seulement si l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_n(x)\mathrm{d}x$$

converge absolument. Or on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^a xn\frac{x^{n-1}}{a^n}\mathrm{d}x$$

qui est donc une intégrale sur un segment, et qui converge absolument. Donc $\boxed{V_n \text{ admet une espérance.}}$
De plus :

$$\begin{aligned} E(V_n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_n(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^a xn\frac{x^{n-1}}{a^n}\mathrm{d}x \\ &= \frac{n}{a^n}\int_0^a x^n\mathrm{d}x \\ &= \frac{n}{a^n}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^a \\ &= \boxed{\frac{n}{n+1}a.} \end{aligned}$$

Comme $E(V_n) \neq a$ (puisque $a > 0$), $\boxed{\text{l'estimateur } V_n \text{ est biaisé.}}$

4. Soit $\epsilon > 0$. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|V_n - a| \geqslant \epsilon) &= 1 - \mathbb{P}(|V_n - a| < \epsilon) \\ &= 1 - \mathbb{P}(a-\epsilon < V_n < a+\epsilon) \\ &= 1 - \mathbb{P}(a-\epsilon < V_n) \\ &\quad (\text{car } \mathbb{P}(V_n \leqslant a) = 1) \\ &= \mathbb{P}(V_n \leqslant a-\epsilon). \end{aligned}$$

- Si $\epsilon > a$, alors $\mathbb{P}(V_n \leqslant a-\epsilon) = 0$ (car $V_n \geqslant 0$) et donc :

$$\boxed{\mathbb{P}(|V_n - a| \geqslant \epsilon) = 0.}$$

- Si $\epsilon \leqslant a$, alors on utilise $\mathbb{P}(V_n \leqslant a-\epsilon) = F_n(a-\epsilon$ pour trouver :

$$\boxed{\mathbb{P}(|V_n - a| \geqslant \epsilon) = n\frac{(a-\epsilon)^{n-1}}{a^n} = \frac{n}{a}\left(1-\frac{\epsilon}{a}\right)^n.}$$

Dans tous les cas, on a :

$$\mathbb{P}(|V_n - a| \geqslant \epsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

(car c'est égal dans un cas et car $0 \leqslant 1 - \frac{\epsilon}{a} < 1$ dans le second cas) et donc :

$$\boxed{V_n \xrightarrow{P} a}$$

c'est-à-dire $\boxed{V_n \text{ est un estimateur convergent.}}$

5. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(n(a - V_n) \leqslant t) &= \mathbb{P}\left(a - V_n \leqslant \frac{t}{n}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(V_n \geqslant a - \frac{t}{n}\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(V_n < a - \frac{t}{n}\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(V_n \leqslant a - \frac{t}{n}\right) \\
&\quad \text{(var } V_n \text{ est à densité)} \\
&= \boxed{1 - F_n\left(a - \frac{t}{n}\right).}
\end{aligned}$$

Remplaçons par l'expression de F_n. On a :

$$\mathbb{P}(n(a - V_n) \leqslant t) = \begin{cases} 1 - 0 & \text{si } t > na, \\ 1 - \left(\frac{a - \frac{t}{n}}{a}\right)^n, & \text{si } t \in [na, 0] \\ 1 - 1 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Pour t fixé et n suffisamment grand, on aura toujours $t \leqslant na$. Donc on aura, pour n suffisamment grand :

$$\mathbb{P}(n(a - V_n) \leqslant t) = \begin{cases} 1 - \left(1 - \frac{t}{na}\right)^n, & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

On a pour $t \geqslant 0$:

$$\left(1 - \frac{t}{na}\right)^n = \exp\left(n \ln[1 - \frac{t}{na}]\right).$$

Or :

$$n \ln[1 - \frac{t}{na}] = n\left[-\frac{t}{na} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right] = -\frac{t}{a} + \underset{n\to+\infty}{o}(1).$$

Donc :

$$\left(1 - \frac{t}{na}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(n(a - V_n) \leqslant t) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}, & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}}$$

On reconnaît à droite la fonction de répartition de la loi exponentielle $\mathcal{E}(a)$. Comme la limite est vraie en tout point de continuité (c-à-d sur $\mathbb{R}$)de cette fonction de répartition, on a :

$$\boxed{V_n \xrightarrow{\mathcal{L}} V}$$

où $\boxed{V \hookrightarrow \mathcal{E}(a).}$

6. Soit $\alpha \in]0,1[$. Pour $t \geqslant 0$, on a :
$$\mathbb{P}(n(a-V_n) \leqslant t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}.$$
On résout donc :
$$\begin{aligned} 1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}} = 1-\alpha &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\frac{t}{a}} = \alpha \\ &\Leftrightarrow -\frac{t}{a} = \ln(\alpha) \\ &\Leftrightarrow t = -a\ln(\alpha). \end{aligned}$$
Et comme $\alpha \in]0,1[$, on a bien $t > 0$.
On a :
$$\mathbb{P}(n(a-V_n) \leqslant -a\ln(\alpha)) = \mathbb{P}(a(n+\ln(\alpha)) \leqslant nV_n) = \mathbb{P}\left(a \leqslant \frac{nV_n}{n+\ln(\alpha)}\right).$$
De plus, on a $V_n \leqslant a$. Donc :
$$\mathbb{P}(n(a-V_n) \leqslant -a\ln(\alpha)) = \mathbb{P}\left(V_n \leqslant a \leqslant \frac{n}{n+\ln(\alpha)}V_n\right).$$
On en déduit :
$$\boxed{\mathbb{P}\left(V_n \leqslant a \leqslant \frac{n}{n+\ln(\alpha)}V_n\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1-\alpha.}$$
Donc $\boxed{\left[V_n, \frac{n}{n+\ln(\alpha)}V_n\right] \text{ est un intervalle de confiance asymptotique de } a \text{ au niveau de confiance } 1-\alpha.}$

7. (a) D'après le théorème de transfert, V_n admet un moment d'ordre 2 si et seulement si l'intégrale :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_n(x)\mathrm{d}x$$
converge absolument. Comme pour l'espérance, cette intégrale est sur un segment et donc $\boxed{V_n \text{ admet bien un moment d'ordre 2.}}$
De plus, on a :
$$\begin{aligned} \mathbb{E}(V_n^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_n(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^a x^2 n\frac{x^{n-1}}{a^n}\mathrm{d}x \\ &= \frac{n}{a^n}\int_0^a x^{n+1}\mathrm{d}x \\ &= \frac{n}{a^n}\left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^a \\ &= \boxed{\frac{n}{n+2}a^2.} \end{aligned}$$

(b) On calcule :
$$\begin{aligned} \mathbb{E}((V_n-a)^2) &= \mathbb{E}(V_n^2 - 2aV_n + a^2) \\ &= \mathbb{E}(V_n^2) - 2a\mathbb{E}(V_n) + a^2 \\ &\quad \text{(par linéarité de l'espérance)} \\ &= \frac{n}{n+2}a^2 - 2a\frac{n}{n+1}a + a^2 \\ &= \frac{n(n+1) - 2n(n+2) + (n+1)(n+2)}{(n+1)(n+2)}a^2 \\ &= \boxed{\frac{a^2}{(n+1)(n+2)}.} \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Markov à $(V_n - a)^2$ qui est positive et admet une espérance comme on vient de le montrer, on a pour tout $\epsilon > 0$:

$$\mathbb{P}((V_n - a)^2 \leqslant \epsilon^2) \leqslant \frac{a^2}{(n+1)(n+2)\epsilon^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Or $\mathbb{P}(|V_n - a| \leqslant \epsilon) = \mathbb{P}((V_n - a)^2 \leqslant \epsilon^2)$ et donc :

$$\mathbb{P}(|V_n - a| \leqslant \epsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{V_n \xrightarrow{P} a.}$$

Nous venons de retrouver que $\boxed{V_n \text{ est un estimateur convergent.}}$

Partie II - Méthode des moments.

8.

```python
def sim_M(n,a):
    x = uniforme(0,a,n)
    return 2*np.mean(x)
```

9. Par linéarité de l'espérance, $\overline{X}_n$ admet une espérance. On a :

$$\boxed{\mathbb{E}(\overline{X}_n) = \frac{\mathbb{E}(X_1) + \cdots + \mathbb{E}(X_n)}{n} = \frac{n \times \frac{a}{2}}{n} = \frac{a}{2}.}$$

De même, comme les X_i admettent une variance, $\overline{X}_n$ en admet une également et par indépendance, on a :

$$\boxed{\mathbb{V}(\overline{X}_n) = \frac{\mathbb{V}(X_1) + \cdots + \mathbb{V}(X_n)}{n^2} = \frac{n \times \frac{a^2}{12}}{n^2} = \frac{a^2}{12n}.}$$

On en déduit en particulier que :

$$\boxed{\mathbb{E}(M_n) = 2\mathbb{E}(\overline{X}_n) = a}$$

et donc $\boxed{M_n \text{ est un estimateur sans biais de } a.}$

10. On a de manière similaire :

$$\boxed{\mathbb{V}(M_n) = 4\mathbb{V}(\overline{X}_n) = \frac{a^2}{3n}.}$$

Comme M_n est sans biais, il est *a fortiori* asymptotiquement sans biais. Et comme $\mathbb{V}(M_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a que $\boxed{M_n \text{ est un estimateur convergent de } a.}$

11. On a :

$$\sqrt{n}(M_n - a) = \sqrt{n}(2\overline{X}_n - a) = 2\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \frac{a}{2}\right) = \frac{a}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{12n}}{a}\left(\overline{X}_n - \frac{a}{2}\right) = \frac{a}{\sqrt{3}}\overline{X}_n^\star$$

où $\overline{X}_n^\star$ est la moyenne empirique centrée réduite.
Comme les X_i sont indépendantes et identiquement distribuées, on a :

$$\overline{X}_n^\star \xrightarrow{\mathcal{L}} X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

Puis en appliquant la fonction $t \mapsto \frac{a}{\sqrt{3}}t$ qui est continue, on obtient :

$$\boxed{\sqrt{n}(M_n - a) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{a}{\sqrt{3}}X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{a^2}{3}\right)}$$

où on a utilisé une transformation affine de loi normale.

12. Soit $t > 0$. On a d'une part :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\sqrt{n}|M_n - a| \leqslant t) &= \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{3n}}{a}|M_n - a| \leqslant \frac{\sqrt{3}t}{a}\right)\\
&= \mathbb{P}\left(|\overline{X}_n^\star| \leqslant \frac{\sqrt{3}t}{a}\right)\\
&= \mathbb{P}\left(-\frac{\sqrt{3}t}{a} \leqslant \overline{X}_n^\star \leqslant \frac{\sqrt{3}t}{a}\right)
\end{aligned}$$

Notons Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. On a alors :

$$\mathbb{P}\left(-\frac{\sqrt{3}t}{a} \leqslant \overline{X}_n^\star \leqslant \frac{\sqrt{3}t}{a}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Phi\left(\frac{\sqrt{3}t}{a}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{3}t}{a}\right) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{3}t}{a}\right) - 1$$

où on a utilisé $\Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$.
Comme Φ est continue et strictement croissante (car de dérivée strictement positive) sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de la bijection, c'est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$.
Il existe donc un unique $x_\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\Phi(x_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$. On obtient donc avec $t = \frac{a}{\sqrt{3}}x_\alpha$:

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{n}|M_n - a| \leqslant \frac{a}{\sqrt{3}}x_\alpha\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 - \alpha.$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\sqrt{n}|M_n - a| \leqslant \frac{a}{\sqrt{3}}x_\alpha\right) &= \mathbb{P}\left(|M_n - a| \leqslant \frac{ax_\alpha}{\sqrt{3n}}\right)\\
&= \mathbb{P}\left(a - \frac{ax_\alpha}{\sqrt{3n}} \leqslant M_n \leqslant a + \frac{ax_\alpha}{\sqrt{3n}}\right)\\
&= \mathbb{P}\left(a\left[1 - \frac{x_\alpha}{\sqrt{3n}}\right] \leqslant M_n \leqslant a\left[1 + \frac{x_\alpha}{\sqrt{3n}}\right]\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\frac{M_n}{1 + \frac{x_\alpha}{\sqrt{3n}}} \leqslant a \leqslant \frac{M_n}{1 - \frac{x_\alpha}{\sqrt{3n}}}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\frac{M_n}{1 + \frac{x_\alpha}{\sqrt{3n}}} \leqslant a \leqslant \frac{M_n}{1 - \frac{x_\alpha}{\sqrt{3n}}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 - \alpha.}$$

Donc $\boxed{\left[\frac{M_n}{1+\frac{x_\alpha}{\sqrt{3n}}}, \frac{M_n}{1-\frac{x_\alpha}{\sqrt{3n}}}\right] \text{ est un intervalle de confiance asymptotique de } a \text{ au niveau de confiance } 1-\alpha.}$

Pour comparer les intervalles de confiance, nous n'avons pas vraiment besoin de la valeur de t_α. Le point important est la dépendance en n : est-ce que lorsque n grandit, on obtient une meilleur approximation et à quel point ?
Considérons l'intervalle de confiance asymptotique $\left[V_n, \frac{n}{n+\ln(\alpha)}V_n\right]$. L'intervalle est d'amplitude :

$$\begin{aligned}
\frac{n}{n+\ln(\alpha)}V_n - V_n &= \left(\frac{1}{1+\frac{\ln(\alpha)}{n}} - 1\right)V_n\\
&= \left(1 - \frac{\ln(\alpha)}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)V_n\\
&= -\frac{\ln(\alpha)}{n}V_n + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

en considérant que V_n est borné (car dans $[0,a]$). La taille de l'intervalle est bien positive car $\alpha \in]0,1[$ et donc $\ln(\alpha) < 0$. La taille de l'intervalle évolue donc comme $\frac{1}{n}$.

L'amplitude de l'intervalle $\left[\frac{M_n}{1+\frac{x_\alpha}{\sqrt{3n}}}, \frac{M_n}{1-\frac{x_\alpha}{\sqrt{3n}}}\right]$ est quant à elle :

$$\begin{aligned}
\frac{M_n}{1-\frac{x_\alpha}{\sqrt{3n}}} - \frac{M_n}{1+\frac{x_\alpha}{\sqrt{3n}}} &= \frac{\sqrt{3n}M_n}{\sqrt{3n}-x_\alpha} - \frac{\sqrt{3n}M_n}{\sqrt{3n}+x_\alpha} \\
&= \sqrt{3n}M_n \times \frac{\sqrt{3n}+x_\alpha-\sqrt{3n}+x_\alpha}{(\sqrt{3n}-x_\alpha)(\sqrt{3n}+x_\alpha)} \\
&= \frac{2\sqrt{3n}x_\alpha M_n}{3n-x_\alpha^2} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2x_\alpha M_n}{\sqrt{3n}}
\end{aligned}$$

Cette fois la taille de l'intervalle évolue comme $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Donc pour n grand, cette intervalle sera plus grand (et donc moins précis) que celui du maximum de vraisemblance.
Ainsi, sur les considérations de précisions de l'intervalle (pour le même niveau de confiance), il semble que $\boxed{\left[V_n, \frac{n}{n+\ln(\alpha)}V_n\right] \text{ soit un meilleur intervalle de confiance que } \left[\frac{M_n}{1+\frac{x_\alpha}{\sqrt{3n}}}, \frac{M_n}{1-\frac{x_\alpha}{\sqrt{3n}}}\right].}$

13. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((M_n-a)^2) &= \mathbb{E}(M_n^2-2aM_n+a^2) \\
&= \mathbb{E}(M_n^2)-2a\mathbb{E}(M_n)+a^2 \\
&= \mathbb{V}(M_n)+\mathbb{E}(M_n)^2-2a\mathbb{E}(M_n)+a^2 \\
&= 4\mathbb{V}(\overline{X}_n)+4\mathbb{E}(\overline{X}_n)^2-4a\mathbb{E}(\overline{X}_n)+a^2 \\
&= 4\times\frac{a^2}{12n}+4\times\frac{a^2}{4}-4a\times\frac{a}{2}+a^2 \\
&= \frac{a^2+3na^2-6na^2+3na^2}{3n} \\
&= \boxed{\frac{a^2}{3n}.}
\end{aligned}$$

On avait trouvé dans une question précédente :

$$\mathbb{E}((V_n-a)^2) = \frac{2a^2}{(n+1)(n+2)}.$$

On peut donner une interprétation de ces résultats. La formule $\mathbb{E}((X-a)^2)$ ressemble à la formule de la variance où on aurait remplacé l'espérance par a. Au lieu d'être l'écart quadratique moyen à l'espérance, c'est l'écart quadratique moyen à a.
Cela signifie que plus $\mathbb{E}((X-a)^2)$ est faible, plus, en moyenne, l'estimateur X est proche de a. Ici, on a :

$$\mathbb{E}((M_n-a)^2) = \frac{a^2}{3n} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}((V_n-a)^2) = \frac{2a^2}{(n+1)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2a^2}{n^2}.$$

Donc encore une fois, pour n grand, l'écart quadratique moyen à a de V_n est sensiblement plus faible que celui de M_n. Dit autrement : V_n est plus rapidement proche de a que M_n.
C'est ce qu'on observe sur les graphiques : les valeurs observées pour V_n se reserrent rapidement autour de 1, alors que celles de M_n, même si effectivement elles convergent, semblent encore osciller de manière sensible à vers $n = 100$.
Remarque : La quantité $\mathbb{E}((X-a)^2)$ porte en fait un nom : c'est le risque quadratique. C'était dans le précédent programme et a disparu mais apparaît, sans être nommé, dans quelques preuves.

Partie III - Consistance de ces estimateurs.

14. (a) Soit $t \in]a, 2a]$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(V_n \leqslant t) &= \mathbb{P}(\max(X_1, \dots, X_n) \leqslant t) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k \leqslant t]\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k \leqslant t) \\
& \text{(par indépendance)} \\
&= \mathbb{P}(X_1 \leqslant t)\Big(\mathbb{P}(X_2 \leqslant t)\Big)^{n-1} \\
& \text{(loi commune pour } X_2 \text{ à } X_n) \\
&= \mathbb{P}(X_1 \leqslant t) \\
& \text{(car } X_2 \leqslant a) \\
&= \boxed{\frac{t}{2a}.} \\
& \text{(fonction de répartition pour } t \in [0, 2a])
\end{aligned}$$

(b) Notons F_{V_n} la fonction de répartition de V_n.
On a clairement pour $t < 0$:

$$F_{V_n}(t) = \mathbb{P}(V_n \leqslant t) = 0$$

et pour $t > 2a$:

$$F_{V_n}(t) = \mathbb{P}(V_n \leqslant t) = 1.$$

On vient de calculer le cas $t \in]a, 2a]$. Il reste donc le cas $t \in [0, a]$:

$$\begin{aligned}
F_{V_n}(t) &= \mathbb{P}(V_n \leqslant t) \\
&= \mathbb{P}(\max(X_1, \dots, X_n) \leqslant t) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k \leqslant t]\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k \leqslant t) \\
& \text{(par indépendance)} \\
&= \mathbb{P}(X_1 \leqslant t)\Big(\mathbb{P}(X_2 \leqslant t)\Big)^{n-1} \\
& \text{(loi commune pour } X_2 \text{ à } X_n) \\
&= \frac{t}{2a} \times \left(\frac{t}{a}\right)^{n-1} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{t}{a}\right)^{n}.
\end{aligned}$$

On en déduit que la fonction de répartition de V_n s'exprime pour $t \in \mathbb{R}$ par :

$$\boxed{F_{V_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{t}{a}\right)^n & \text{si } t \in [0, a] \\ \frac{t}{2a} & \text{si } t \in]a, 2a] \\ 1 & \text{si } t > 2a \end{cases}.}$$

Quand n tend vers l'infini, pour $t \in \mathbb{R}$ fixé, on a alors :

$$F_{V_n}(t) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \in [0, a[\\ \frac{1}{2} & \text{si } t = a \\ \frac{t}{2a} & \text{si } t \in]a, 2a] \\ 1 & \text{si } t > 2a \end{cases}$$

La fonction F définie par :

$$\boxed{F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \frac{t}{2a} & \text{si } t \in [a, 2a] \\ 1 & \text{si } t > 2a \end{cases}}$$

est bien croissante, continue à droite et de limites :

$$\lim_{t \to -\infty} F(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \to +\infty} F(t) = 1.$$

Donc F est bien une fonction de répartition. En tout point $t \in \mathbb{R}$ et donc, *a fortiori*, en tout point de continuité de F, on a :

$$F_{V_n}(t) \xrightarrow[n \to]{} F(t).$$

Donc $\boxed{V_n \text{ converge en loi vers la variable décrite par la fonction de répartition } F.}$

(c) On a :

$$\boxed{\mathbb{P}\left(V_n > \frac{3}{2}a\right) = 1 - \mathbb{P}\left(V_n \leqslant \frac{3}{2}a\right) = 1 - \frac{\frac{3}{2}a}{2a} = \frac{1}{4}.}$$

Ainsi $\boxed{V_n \text{ n'est pas un estimateur convergent.}}$
En effet, si V_n était convergent, on aurait :

$$\forall \epsilon > 0, \mathbb{P}(|V_n - a| \geqslant \epsilon) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Ce serait vrai en particulier pour $\epsilon = \frac{a}{2}$. Or :

$$0 \leqslant \mathbb{P}\left(V_n > \frac{3}{2}a\right) \leqslant \mathbb{P}\left(|V_n - a| \geqslant \frac{1}{2}a\right).$$

Donc si V_n était convergent, on aurait $\mathbb{P}\left(V_n > \frac{3}{2}a\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{4} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$\boxed{\text{ce qui est faux.}}$

15. (a) On a :

$$\boxed{M_n = \frac{2}{n}(X_1 + \cdots + X_n) = \frac{2}{n}X_1 + \frac{2}{n} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{2}{n-1}(X_2 \cdots + X_n) = \frac{2}{n}X_1 + \frac{n-1}{n}M'_n.}$$

(b) On a donc :

$$\begin{aligned} |M_n - a| &= \left|\frac{2}{n}X_1 + \frac{n-1}{n}M'_n - a\right| \\ &\leqslant \left|\frac{2}{n}X_1 - \frac{a}{n}\right| + \left|\frac{n-1}{n}M'_n - \frac{n-1}{n}a\right| \\ &\leqslant \frac{1}{n}\underbrace{|2X_1 - a|}_{\leqslant 3a \text{ car } X_1 \in [0,2a]} + \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\leqslant 1}|M'_n - a| \\ &\leqslant \boxed{\frac{3a}{n} + \left|M'_n - a\right|.} \end{aligned}$$

(c) Pour $n \geqslant n_0$, on a :

$$\begin{aligned} |M_n - a| &\leqslant \frac{3a}{n} + |M'_n - a| \\ &\leqslant \frac{3a}{n_0} + |M'_n - a| \\ &< \epsilon + |M'_n - a|. \end{aligned}$$

Donc si $|M'_n - a| < \epsilon$ alors $|M_n - a| < 2\epsilon$ et ainsi :

$$\boxed{\Big[|M'_n - a| < \epsilon\Big] \subset \Big[|M_n - a| < 2\epsilon\Big].}$$

(d) En passant aux événements contraires, on trouve :

$$\Big[|M'_n - a| \geqslant \epsilon\Big] \supset \Big[|M_n - a| \geqslant 2\epsilon\Big].$$

Donc, pour n suffisamment grand et en posant $\epsilon' = 2\epsilon$, on a :

$$0 \leqslant \mathbb{P}\Big(|M_n - a| \geqslant \epsilon'\Big) \leqslant \mathbb{P}\Big(|M'_n - a| \geqslant \frac{\epsilon'}{2}\Big).$$

Or M'_n est un estimateur convergent et donc le membre de droite tend vers 0. D'où, par encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\Big(|M_n - a| \geqslant \epsilon'\Big) = 0$$

c'est-à-dire, $\boxed{M_n \xrightarrow{P} a.}$

16. On constate qu'en introduisant une erreur, V_n n'est plus convergent, mais M_n le reste.
La précision supplémentaire de V_n a un coût : il est moins robuste aux erreurs.