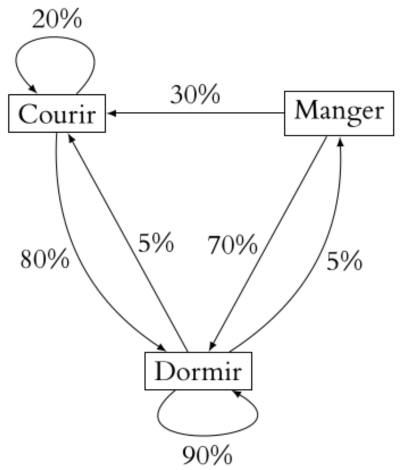
TPA3 - Chaînes de Markov 1

Dans tout le TP, on importe les modules suivants :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import numpy.linalg as al
import matplotlib.pyplot as plt
```

1 Prélude : Doudou le Hamster



Doudou le hamster n'a que trois occupations dans sa cage : il dort, il court dans sa roue et il mange. Chaque minute, il change d'activité ou continue celle qu'il était en train de faire. On suppose que :

- s'il dort à un instant donné, la minute suivante il y a 9 chances sur 10 qu'il dorme encore la minute suivante, mais s'il se réveille, il va soit manger, soit courir, les deux étant aussi probables l'un que l'autre.
- s'il mange, il y a 3 chances sur 10 qu'il parte dans sa roue, et 7 chances sur 10 qu'il retourne se coucher.
- s'il court, il y a 8 chances sur 10 qu'il aille se coucher à l'instant suivant, et sinon, il court encore un peu.

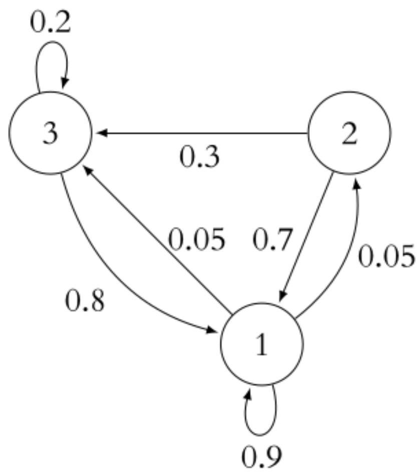
En moyenne, combien de temps Doudou consacre-t-il à chacune de ses activités ? S'il dort au moment où vous le regardez, quelle est la probabilité qu'il dorme 10 minutes plus tard ? etc.

2 Les chaînes de Markov

Considérons un ensemble E fini, dont les éléments sont notés $x_1, \ldots, x_N$ et appelés **états.**
Une **chaîne de Markov** sur E est une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires à valeurs dans E (pour simplifier, considérons que dans la suite $E = [\![1, N]\!]$), de sorte qu'il s'agisse de variables aléatoires réelles) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi de X_{n+1} sachant X_0, X_1, ..., X_n est égale à la loi de X_{n+1} sachant X_n. De manière formelle, cela signifie que :

$$\forall (i_0, \ldots, i_n, i_{n+1}) \in [\![1, N]\!]^{n+1},\ P_{[X_0=i_0]\cap\cdots\cap[X_n=i_n]}(X_{n+1} = i_{n+1}) = P_{[X_n=i_n]}(X_{n+1} = i_{n+1}).$$

Exemple : la chaîne de Markov de Doudou.



Numérotons les trois activités de Doudou de 1 à 3 : par exemple, 1 pour « dormir », 2 pour « manger » et 3 pour « courir ».
Supposons dans un premier temps que Doudou dort à l'instant 0, et notons X_0 la variable aléatoire certaine égale à 1, et pour tout n, notons X_n la variable aléatoire indiquant l'activité de Doudou à la $n^{\text{ème}}$ minute.
Alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur $[\![1, 3]\!]$.
En effet, les règles régissant son activité future ne dépendent que de son activité présente, et ces règles ne changent pas au cours du temps.

De plus, les règles énoncées précédemment nous donnent la loi de X_{n+1} sachant X_n (on parle de **probabilités de transition**). Par exemple $P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 1) = \frac{9}{10}$ et $P_{[X_n=3]}(X_{n+1} = 2) = 0$.

Exercice 1 ⋆⋆

En supposant que $X_0 = 1$ (c'est-à-dire que Doudou dort à l'instant 0), déterminer les lois de X_1 et X_2 puis calculer leurs espérances. Que signifient ces espérances ?

3 Simulation naïve

Si l'on souhaite simuler une chaîne de Markov, une première possibilité est d'écrire une fonction qui prend en entrée un état de la chaîne, et qui retourne la valeur (aléatoire) à l'instant suivant.

Exercice 2 ⋆⋆

1. On souhaite écrire une fonction `doudou(i)` qui prend en entrée un paramètre $i \in [\![1, 3]\!]$ correspondant à l'activité de Doudoud à l'instant n, et simule l'activité de Doudou à l'instant $n + 1$ (c'est-à-dire qui retourne un nombre de $[\![1, 3]\!]$ suivant les règles précédemment énoncées). Par exemple, si $i = 2$, `doudou(2)` devra retourner 3 avec probabilité $0,3$ et 1 avec une probabilité $0,7$.
2. On suppose que Doudou dort à l'instant 0. En appelant 10 000 fois `doudou`, et en étudiant les fréquences d'appartition de chacun des états, retrouver la loi de X_1 déterminée dans le premier exercice.

Exercice 3 - Doudou mange à l'instant initial ⋆ ⋆ ⋆

1. Que va simuler la commande `doudou(doudou(2))` ? Et la commande `doudou(doudou(doudou(2)))` ?
2. Écrire une fonction `plus_tard(n)` qui utiliser la fonction `doudou` pour simuler l'activité de Doudou à l'instant n.
3. À l'aide d'une (ou plusieurs) boucle et de la fonction `plus_tard`, créer une matrice 100×100 qui simule l'activité de 10 000 Doudous quatre heures après l'instant initial.
4. Quelle répartition des activités de Doudou observez-vous ?
5. Modifier votre code en supposant que Doudou court à l'instant initial, puis que Doudou dort. Qu'observez-vous ?

4 Matrice de transition d'une chaîne de Markov

Exemple : une compagnie d'assurances automobiles met en place un système de bonus-malus pour ses clients. Ceux-ci peuvent bénéficier de bonus de 10, 20, 30 ou 40%, et des mêmes malus.
Il sont donc répartis en 9 catégories, numérotées de 1 à 9, la première correspondant à un bonus de 40%, la suivante à un bonus de 30%, etc, jusqu'à la dernière qui correspond à un malus maximal.
On considère que chaque année, un conducteur a :

- 0 accident avec probabilité 2/3,
- 1 accident avec probabilité 1/6,
- 2 accidents avec probabilité 1/12,
- 3 accidents avec probabilité 1/12.

Si un conducteur n'a pas d'accident, alors il gagne 10% de bonus (sauf si celui-ci est déjà maximal) et s'il a k accidents, il perd $k \times 10\%$ de bonus (sauf si son malus est déjà maximal).
En notant alors X_n le numéro de la catégorie du conducteur au bout de n années, nous avons une chaîne de Markov sur $[\![1, 9]\!]$.
Nous pourrions l'étudier comme nous l'avons fait pour Doudou en écrivant une fonction qui, étant donnée la catégorie du conducteur l'année n, retourne sa catégorie l'année $n + 1$.
Toutefois, l'écriture d'une telle fonction serait relativement laborieuse (il faudrait distinguer les conducteurs ayant déjà un bonus maximal, mais également ceux ayant un malus maximal) et nous proposons ici une manière commode de représenter les chaînes de Markov à l'aide de matrices.

Définition

On appelle matrice de transition d'une chaîne de Markov sur $[\![1, N]\!]$ la matrice $M = (m_{i,j}) \in \mathrm{M}_N(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1, N]\!]^2,\ m_{i,j} = P_{[X_0=i]}(X_1 = j).$$

Exercice 4 ⋆

Écrure la matrice de transition de la chaîne de Markov de Doudou. Calculer la somme de chacune des lignes. Que remarquez-vous ? Est-ce surprenant ?

Définition

On appelle **état probabiliste** un vecteur ligne $(p_1, \ldots, p_N)$ tel que :

$$\forall i \in [\![1, N]\!],\ p_i \geqslant 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{N} p_i = 1.$$

Un état probabiliste permet de représenter facilement la loi d'une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1, N]\!]$.
Par exemple, si Doudou dort à l'instant initial, alors la loi de X_0 est représentée par le vecteur $(1, 0, 0)$, et la loi de X_1 est représentée par $(0.9, 0.05, 0.05)$.

Proposition

Si μ_i est l'état probabiliste représentant la loi de X_i, alors, par la formule des probabilités totales :

$$\forall i \in \mathbb{N},\ \mu_{i+1} = \mu_i M.$$

Ainsi pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\mu_i = \mu_0 M^i$.

Exercice 5 ⋆⋆

1. Créer la matrice `M` qui est la matrice de transition de la chaîne de Markov de Doudou.
2. Déterminer sans boucle la loi de X_{1440} (1440 étant le nombre de minutes dans une journée) si Doudou dort à l'instant initial.
3. Faire de même si Doudou mange à l'instant initial, ou s'il court. Que remarquez-vous ?

Exercice 6 - Retour sur la compagnie d'assurance ⋆⋆⋆

1. Écrire la matrice de transition de la chaîne de Markov associée.
2. Un jeune conducteur commence son parcours d'assuré sans bonus ni malus. Quelle est la probabilité que 30 ans après l'obtention de son permis, il ait un malus maximal ? Un bonus maximal ? 10% de bonus ?
3. Représenter sur un graphique la proportion de conducteurs dans chaque catégorie au bout de 40 ans, en supposant que tous commencent sans bonus ni malus.
4. La compagnie s'est spécialisée dans les mauvais conducteurs (qu'elle assure à prix d'or !), et on suppose que les nouveaux assurés ont tous un malus maximal.

   Au bout de 30 ans, quelle proportion d'assurés auront toujours un malus maximal ?