TPB6 - FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES - EXERCICES

Dans tout le TP, on importe les modules suivants :

```
1 import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
```

1 Applications

Exercice 1 - Graphe

★

Tracer le graphe et les lignes de niveaux des fonction $f_\mu : (x, y) \mapsto e^{-\mu(x^2+y^2)} \sin(x)$ pour $\mu \in \{1/10, 1, 10\}$.

Exercice 2 - Plans tangents

★★

On considère les fonctions :

$$\begin{aligned} f : (x, y) &\mapsto x^2 + y^2, \\ g : (x, y) &\mapsto -x^2 - y^2, \\ h : (x, y) &\mapsto x^2 - y^2. \end{aligned}$$

1. Vérifier que le plan d'équation $z = 0$ est bien le plan tangent au point $(0, 0)$ du graphe de chacune de ces fonctions.
2. Tracer le graphe de chacune de ces fonctions ainsi que le plan tangent au point $(0, 0)$. Commenter la position relative du graphe et du plan.
3. Déterminer la hessienne de ces fonctions en $(0, 0)$. Mettre en lien le spectre de la hessienne et la position relative précédente.

2 Divers

Exercice 3 - Un point selle dégénéré

★★

La fonction $f : (x, y) \mapsto (x^2 - y)(3x^2 - y)$ admet $(0, 0)$ comme unique point critique et nous pourrions prouver qu'il s'agit d'un point selle.

1. Vérifier graphiquement qu'il s'agit d'un point critique.
2. Reconnaissez-vous un point selle ? Déterminer la hessienne en $(0, 0)$ et ses valeurs propres. Commenter.

Exercice 4 - Lecture graphique

★★★

Soit $f : (x, y) \mapsto \frac{1}{1+x^2} \sin(x^2 + y^2)$.

1. Tracer le graphe de f sur une plage de votre choix. f semble-t-elle avoir des extrema locaux ? Globaux ? En quel(s) point(s) ?
2. Prouver les résultats observés graphiquement.

Exercice 5 - Extremum sous contrainte

**

On étudie la fonction $f : (x, y) \mapsto xy$.

1. Tracer la fonction. Par lecture graphique, possède-t-elle un extremum ?
2. On veut chercher les extrema de f sous la contrainte linéaire $x = y$. Justifier que cela revient à étudier la fonction $t \mapsto t^2$. Admet-elle un extremum ?
3. Comment pourrait-on représenter cela sur le premier graphique ?