Correction DS5 - HEC ECS Maths I 2019

Partie I - Un premier exemple.

Soit a un réel différent de 1 et

$$A = \frac{1}{1-a}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & -a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

1. Quel est le rang de A? Calculer A^2.Que peut-on dire de l'endomorphisme f canoniquement associé à A? est-ce un endomorphisme diagonalisable ? Quels sont les valeurs propres et les sous-espaces propres de f?

   Deux colonnes proportionnelles et non nulles donc $\boxed{\text{rg}(A) = 1}$.

   $\boxed{A^2 = A}$ donc $f^2 = f$ et $\boxed{f \text{ est un projecteur.}}$ Donc $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$

   Les valeurs propres de f sont parmi $\{0, 1\}$

   On remarque que $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ et $A\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$

   Donc 0 et 1 sont les valeurs propres de f et comme $\dim(E_0) + \dim(E_1) = 2$, chacun des deux sous espaces propres est de dimension 1

   La famille libre en est donc une base donc génératrice et

   $\boxed{E_0 = \text{Vect}((1,1)) \text{ et } E_1 = \text{Vect}((1,a))}$

2. Calculer $M = {}^tA\,A$. La matrice M est -elle diagonalisable ? Comparer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Ker}(s_f)$. Quels sont les valeurs propres et les sous-espaces propres de s_f?

   $\boxed{M = {}^tA\,A = \frac{1+a^2}{(1-a)^2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$

   $\boxed{M \text{ est symétrique réelle donc diagonalisable}}$

   Si $x \in \text{Ker}(f)$ alors $f(x) = 0$ donc $f^* \circ f(x) = 0$ et $x \in \text{Ker}(s_f)$ donc $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(s_f)$.

   et s_f de rang 1 donc (th du rang) $\dim \text{Ker}(s_f) = 1$ et $\boxed{\text{Ker}(f) = \text{Ker}(s_f)}$.

   Et on a $M\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1+a^2}{(1-a)^2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $(1,-1) \neq 0$ vecteur propre associé à la valeur propre $\frac{1+a^2}{(1-a)^2} = \lambda$.

   En dimension 1, s_f ne peut pas avoir d'autre valeurs propres.

   Et la somme des dimension des sous espaces propres impose que

   $\boxed{E_\lambda(s_f) = \text{Vect}(1,-1) \text{ et } E_0(s_f) = \text{Vect}(1,1)}$

3. À quelle condition nécessaire et suffisante, M est-elle la matrice d'un projecteur ?

   M est la matrice d'un projecteur $\Longleftrightarrow s_f$ est un projecteur

   ALORS ses valeurs propres sont parmi $\{0, 1\}$ donc $\frac{1+a^2}{(1-a)^2} = 1$ ou 0 (impossible)

   DONC $a = 0$

   et quand $a = 0$, $M^2 = M$ donc

   $\boxed{M \text{ est la matrice d'un projecteur} \Longleftrightarrow a = 0}$

Partie II - Généralités.

4. Produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

   (a) Soit

   $$A = [a_{ij}]_{(i,j)\in[[1,n]]^2} \quad \text{et} \quad B = [b_{ij}]_{(i,j)\in[[1,n]]^2}$$

   deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donner l'expression de $\text{Tr}\left({}^tA\,B\right)$ en fonction des coefficients de A et de B.

   On a ${}^tA\,B = \left(\sum_{k=1}^n a_{k,i}b_{k,j}\right)_{i,j}$ et $\boxed{\text{Tr}\left({}^tA\,B\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{k,i}b_{k,i}}$

   (b) Montrer que l'application $(A, B) \longmapsto tr({}^tA\,B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   (c'est le produit scalaire canonique ...)

- Application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- Symétrique car $a_{k,i}b_{k,i} = b_{k,i}a_{k,i}$
- Linéaire à droite par linéarité de la trace donc bilinéaire
- Positive : $\mathrm{Tr}\left({}^tA\ A\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (a_{k,i})^2 \geqslant 0$
- Définie positive : si $\mathrm{Tr}\left({}^tA\ A\right) = 0$, une somme de « termes positifs »est nulle alors tous les termes sont nuls donc $(a_{k,i})^2 = 0$ et $A = 0$

Dans la suite du problème, on notera :

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}\left(\left({}^tA\right) B\right) \text{ et } \|A\|_2 = \sqrt{\mathrm{Tr}\left(\left({}^tA\right) A\right)}$$

la norme euclidienne associée.

(c) Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis vérifier que
$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{Tr}\left(A^2\right) \leq \mathrm{Tr}\left({}^tA\ A\right)$.
Montrer également que $\left(\mathrm{Tr}A^2 = \mathrm{Tr}({}^tA\ A)\right) \Leftrightarrow (A \in S_n(\mathbb{R}))$
Cauchy-Schwarz :
$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \|y\|$ pour tout x et y de E ou encore $\langle x, y\rangle^2 \leqslant \|x\|^2 \|y\|^2$
On a $\mathrm{Tr}\left(A^2\right) = \left\langle {}^tA\ , A\right\rangle \leqslant \left\|{}^tA\right\| \|A\|$ avec
$\left\|{}^tA\right\|^2 = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n (a_{k,i})^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (a_{k,i})^2 = \|A\|^2$
donc $\boxed{\mathrm{Tr}\left(A^2\right) \leqslant \|A\|^2 = \mathrm{Tr}\left({}^tA\ A\right)}$
Et par le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz,
$\mathrm{Tr}A^2 = \mathrm{Tr}({}^tA\ A) \Longleftrightarrow \left\langle {}^tA\ , A\right\rangle = \|A\| \left\|{}^tA\right\|$
$\Longleftrightarrow A$ et ${}^tA$ sont colinéaire
et s'il existe λ tel que ${}^tA = \lambda A$ alors ${}^tA\ A = \lambda A^2$ et $\mathrm{Tr}\left({}^tA\ A\right) = \lambda \mathrm{Tr}A^2$
Si $A \neq 0$, $\mathrm{Tr}A^2 = \mathrm{Tr}\left({}^tA\ A\right) = \|A\|_2^2 \neq 0$ donc $\lambda = 1$ et ${}^tA = A$ et A est symétrique.
Si $A = 0$ alors A est symétrique
Donc, si $\mathrm{Tr}A^2 = \mathrm{Tr}({}^tA\ A)$ alors $A \in S_n(\mathbb{R})$
Réciproquement, si $A = {}^tA$ on aura bien l'égalité.
Donc $\boxed{\left(\mathrm{Tr}A^2 = \mathrm{Tr}({}^tA\ A)\right) \Leftrightarrow (A \in S_n(\mathbb{R}))}$

Dans la suite, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f est toujours l'endomorphisme canoniquement associé à A.

5. Caractérisation de la matrice de f^* en base orthonormée :
Soit $B' = (e'_1, ..., e'_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, on note P la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ vers $\mathcal{B}'$ et A' la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

(a) Rappeler la relation liant A et A'
$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f) = P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}'} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'} f\ P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}_0}$
donc $\boxed{A = PA'P^{-1} \text{ et } A' = P^{-1}AP}$

(b) Rappeler pourquoi P est une matrice orthogonale .
P est une matrice de passage entre deux bases orthonormées.
Ces colonnes sont les coordonnées des $(e'_1, ..., e'_n)$ dans $\mathcal{B}_0$
Donc, les produits scalaires (E_i colonne associée à e'_i)
$\left\langle e'_i, e'_j\right\rangle = {}^tE_i\ E_j = 0$ si $i \neq j$ et $= 1$ si $i = j$
Donc ${}^tP\ P = I$

(c) En déduire que ${}^tA'$ est la matrice de f^* dans la base $\mathcal{B}'$
$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0} f^* = {}^tA$ donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'} f^* = P^{-1}\ {}^tA\ P = {}^tP\ {}^tA\ P$
et ${}^tA' = {}^t\left(P^{-1}AP\right) = {}^tP\ {}^tA\ {}^tP^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'} f^*$
Donc $\boxed{{}^tA' \text{ est la matrice de } f^* \text{ dans la base } \mathcal{B}'}$

6. Réduction de s_f.

(a) Vérifier que, pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX\left({}^tA\ A\right)X = \|AX\|^2$

${}^tX\left({}^tA\ A\right)X = \left({}^tX\ {}^tA\right)AX = {}^t(AX)\ AX$ et comme c'est une matrice de $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$,

$\boxed{{}^tX\left({}^tA\ A\right)X = \mathrm{Tr}\left({}^t(AX)\ AX\right) = \|AX\|^2}$

(b) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(s_f)$ et $\mathrm{rg} s_f = \mathrm{rg} f$.

avec $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(x)$, si $x \in \mathrm{Ker}(f)$ alors $AX = 0$ et ${}^tA\ AX = 0$ donc $x \in \mathrm{Ker}(s_f)$

donc $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(s_f)$

Réciproquement :

Si $x \in \mathrm{Ker}(s_f)$ alors $\left({}^tA\ A\right)X = 0$ donc ${}^tX\left({}^tA\ A\right)X = 0$ donc $\|AX\| = 0$

donc $AX = 0$ donc $f(x) = 0$ donc $x \in \mathrm{Ker}(f)$ d'où $\mathrm{Ker}(s_f) \subset \mathrm{Ker}(f)$

et $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(s_f)}$

(c) Vérifier que s_f est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$.

s_f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$

sa matrice ${}^tA\ A$ dans une base orthonormée est symétrique : ${}^t\left({}^tA\ A\right) = {}^tA\ {}^{tt}A = {}^tA\ A$

Donc $\boxed{s_f \text{ est un endomorphisme symétrique de } \mathbb{R}^n}$

(d) Montrer que les valeurs propres de s_f sont positives ou nulles.

Soit x un vecteur propre de s_f associé à λ et X la colonne de ses coordonnées dans $\mathcal{B}_0$

${}^tA\ AX = \lambda X$ donc ${}^tX\ {}^tA\ AX = \lambda\ {}^tX\ X$ et $\|AX\|^2 = \lambda \|X\|^2$

Comme $X \neq 0$ alors $\lambda \geqslant 0$

$\boxed{\text{les valeurs propres de } s_f \text{ sont positives ou nulles.}}$

On note $r = \mathrm{rg} f$ et on suppose pour la fin de la question 6) que $1 \leq r \leq n-1$.

(e) Justifier qu'il existe une base orthonormée $C = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_r, ..., \varepsilon_n)$ de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de s_f est de la forme

$$\begin{pmatrix} D & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}$$

où D est une matrice diagonale d'ordre r dont les éléments diagonaux $\lambda_1, ..., \lambda_r$ sont strictement positifs et où $0_{r,n-r}, 0_{n-r,r}, 0_{n-r,n-r}$ sont des matrices dont tous les coefficients sont nuls.

s_f symétrique est diagonalisable sur une base orthonormée de vecteurs propres.

Le sous espace propre associé à 0 est de dimension $n-r$ (th du rang en dimension finie)

En réordonnant les vecteurs de la base pour placer ceux associés à la valeur propre 0 à la fin, on obtient donc une base orthonormée dans la quelle $\boxed{\text{la matrice de } s_f \text{ est } \begin{pmatrix} D & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}}$ avec D diagonale à termes strictement positifs (les autres valeurs propres)

(f) Montrer que la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$ est de la forme

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} A_1 & 0_{r,n-r} \\ A_3 & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}$$

où $A_1 \in M_r(\mathbb{R})$, $A_3 \in M_{n-r,r}(\mathbb{R})$. Vérifier que ${}^tA_1\ A_1 + {}^tA_3\ A_3 = D$.

Comme $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(s_f)$, les $n-r$ derniers vecteurs de $\mathcal{C}$ forment une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et leurs images sont nulles.

Donc la matrice de f dans la base C est de la forme $M = \begin{pmatrix} A_1 & 0_{r,n-r} \\ A_3 & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}$ où $A_1 \in M_r(\mathbb{R})$, $A_3 \in M_{n-r,r}(\mathbb{R})$.

Comme

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(s_f) &= {}^tM\ M \\ &= \begin{pmatrix} {}^tA_1 & {}^tA_3 \\ 0_{n-t,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & 0_{r,n-r} \\ A_3 & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} {}^tA_1\ A_1 + {}^tA_3\ A_3 & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-t,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

alors $\boxed{{}^tA_1\ A_1 + {}^tA_3\ A_3 = D.}$

7. Étude des valeurs propres de $A \times {}^tA$

   On note $\tau_f = fof^*$ l'endomorphisme canoniquement associé à $A \times {}^tA$.

   (a) Montrer que $rg(s_f) = rg(\tau_f)$ et $\dim(\operatorname{Ker}(s_f)) = \dim(\operatorname{Ker}(\tau_f))$.

   Comme ${}^{tt}A = A$, en substituant ${}^tA$ à A et f^* à f, on obtient que $(f^*)^*$ est l'endomorphisme associé à ${}^{tt}A = A$ donc $(f^*)^* = f$ et $\boxed{\tau_f = s_{f^*}}$

   $\operatorname{Ker}(s_f) = \operatorname{Ker}(f)$ donc (th du rang en dimension finie) $\operatorname{rg}(s_f) = \operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}\left({}^tA\right) = \operatorname{rg}(s_{f^*}) = \operatorname{rg}(\tau_A)$

   Donc $\boxed{rg(s_f) = rg(\tau_f) \text{ et (th du rang) } \dim(\operatorname{Ker}(s_f)) = \dim(\operatorname{Ker}(\tau_f))}$

   (b) Soit λ une valeur propre strictement positive de s_f et x un vecteur propre associé. Vérifier que λ est une valeur propre de τ_f et que $f(x)$ est un vecteur propre associé. Montrer alors que

   $$\dim(E_\lambda(s_f)) \leq \dim(E_\lambda(\tau_f)).$$

   Soit λ une valeur propre strictement positive de s_f et x un vecteur propre associé.
   avec X colonne des coordonnées dans la base$\mathcal{B}_0$.
   On a ${}^tA\,AX = \lambda X$ donc $A\,{}^tA\,(AX) = \lambda(AX)$
   et comme $X \neq 0$ et $\lambda \neq 0$ alors $AX \neq 0$ et AX est colonne propre de $A\,{}^tA$ associé à λ
   donc $\boxed{f(x) \text{ est vecteur propre de } \tau_f \text{ associé à } \lambda}$
   Donc $f(E_\lambda(s_f)) \subset E_\lambda(\tau_f)$ et $\dim f(E_\lambda(s_f)) \leqslant E_\lambda(\tau_f)$
   Or f restreinte à $E_\lambda(s_f)$ est injective :
   Soit $x \in E_\lambda(s_f)$ tel que $f(x) = 0$ alors $AX = 0$ donc ${}^tA\,AX = \lambda X = 0$ et comme $\lambda \neq 0$, $X = 0$ et $x = 0$
   Donc f bijective de $E_\lambda(s_f)$ dans $f(E_\lambda(s_f))$ et $\dim f(E_\lambda(s_f)) = \dim E_\lambda(s_f)$ d'où
   $\boxed{\dim(E_\lambda(s_f)) \leqslant \dim(E_\lambda(\tau_f))}$

   (c) Montrer que τ_f est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres, qu'il possède exactement les mêmes valeurs propres que s_f et que, pour chacune de ces valeurs propres λ, on a

   $$\dim(E_\lambda(s_f)) = \dim(E_\lambda(\tau_f)).$$

   Comme $\tau_f = s_{f^*}$, τ_f est symétrique donc $\boxed{\text{diagonalisable sur une base orthonormée}}$ de vecteurs propres.
   Par égalité des dimension des noyaux, 0 valeur propre de $\tau_f \Longleftrightarrow$ valeur propre de s_f
   Si λ valeur propre <u>non nulle</u> de s_f alors λ valeur propre de τ_f
   Et réciproquement en substituant f^* à f donc $\boxed{\tau_f \text{ et } s_f \text{ ont les mêmes valeurs propres nulles ou pas}}$
   et $(f^*)^* = f$, $\dim(E_\lambda(s_{f^*})) \leqslant \dim(E_\lambda(\tau_{f^*}))$
   donc, pour $\lambda \neq 0$: $\dim(E_\lambda(\tau_f)) \leqslant \dim(E_\lambda(s_f))$ et $\boxed{\dim(E_\lambda(s_f)) = \dim(E_\lambda(\tau_f))}$

   (d) En déduire enfin qu'il existe $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $A \times {}^tA = \Omega\left({}^tA\,A\right)^t\,\Omega$.

   τ_f et s_f ont des valeurs propres (nulles ou pas) identiques et des sous espaces propres de même dimension.
   Donc, en réordonnant pour chacun les vecteurs d'une base orthonormée de vecteurs propres par ordre décroissant (pour avoir les 0 à la fin)
   il existe deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ orthonormées telles que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} s_f = D = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}} \tau_f$
   On a donc $D = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} s_f$ et ${}^tA\,A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_0} s_f = P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}} D P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_0}$
   et $A\,{}^tA = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_0} \tau_f = P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{C}} D P_{\mathcal{C},\mathcal{B}_0} = P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{C}} P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_0}\,{}^tA\,A P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}} P_{\mathcal{C},\mathcal{B}_0}$
   donc, avec $\Omega = P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{C}} P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_0}$ qui est orthogonale (produit de matrices orthogonales)
   $\boxed{A \times {}^tA = \Omega\left({}^tA\,A\right)^t\,\Omega}$

8. Une inégalité

   Dans cette question, on pose

   $$V = \{(x_1, ..., x_n) \in [0, +\infty[^n\} \text{ et } U = \{(x_1, ..., x_n) \in]0, +\infty[^n\},$$

et φ l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\varphi : (x_1, ..., x_n) \longmapsto \prod_{i=1}^{n} x_i.$$

On admet que V est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$ et que U est une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$.

(a) Montrer que
$$W = \{(x_1, ..., x_n) \in V \ / \ x_1 + ... + x_n = 1\}$$
est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^n$.

La fonction $x \mapsto x_1 + ... + x_n$ est continue (polynôme) sur $\mathbb{R}^n$ donc W, image réciproque d'un fermé, est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

Pour tout $x \in V$ (tous les $x_i \geqslant 0$) , $x_i \leqslant x_1 + ... + x_n$ donc, pour $x \in W$, $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ et $\|x\| \leq \sqrt{n}$

Donc $\boxed{W \text{ partie fermée bornée de } \mathbb{R}^n}$.

(b) En déduire que φ admet un maximum global noté M sur W.

φ est continue (polynôme) sur un fermé bornée donc

$\boxed{\varphi \text{ admet un maximum global noté } M \text{ sur } W}$

(c) Calculer $\varphi(x_1, ..., x_n)$ lorsque $(x_1, ..., x_n) \in V \backslash U$.

lorsque $(x_1, ..., x_n) \in V \backslash U$, au oins un des x_i est nul donc $\boxed{\varphi(x) = 0 \text{ pour } x \in V \backslash U}$

(d) En déduire que M est le maximum de φ sur U sous la contrainte $x_1 + ... + x_n = 1$.

Comme 0 n'est pas le maximum de φ sur W, le maximum est atteint sur U.

Donc, M est le maximum de φ sur $W \cap U$ donc $\boxed{\text{sur } U \text{ sous la contrainte } W.}$

(e) Déterminer alors la valeur du maximum M et préciser en quel vecteur de U il est atteint.

Soit $x \in U$ et $g(x) = x_1 + ... + x_n$ contrainte linéaire, $\nabla g(x) = (1, \cdots, 1)$

φ (polynômiale) est C^1 sur l'ouvert U et $\partial_i \varphi(x) = \prod_{k \neq i} x_k$

Donc, si x est un extremum de φ sous la contrainte $g(x) = 1$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla\varphi(x) = \lambda \nabla g(x)$

Donc,pour tout i : $\prod_{k \neq i} x_k = \lambda$ et $\varphi(x) = \prod_{k=1}^{n} x_k = \lambda x_i$ et comme $x \in U$, $\varphi(x) \neq 0$ donc $\lambda \neq 0$ et $x_i = \dfrac{1}{\lambda}\varphi(x)$

(tous les x_i sont égaux)

Comme $g(x) = 1$ on a alors $x_i = \dfrac{1}{n}$ pour tout i

Comme c'est la seule solution possible et que M est une solution, alors

$\boxed{M = \left(\dfrac{1}{n}, \cdots, \dfrac{1}{n}\right) \text{ et } \varphi(M) = \left(\dfrac{1}{n}\right)^n}$

(f) Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. On suppose que les valeurs propres de S sont positives ou nulles et on note $(\mu_1, ..., \mu_n)$ une liste étendue des valeurs propres de S. Déduire de ce qui précède que $\prod_{i=1}^{n} \mu_i \leq \left(\frac{trS}{n}\right)^n$. Dans quel cas a-t-on égalité dans cette inégalité ?

Comme $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = \text{Tr}(S)$ on a, avec $x_i = \mu_i / \text{Tr}(S) \geq 0$: $\sum_{i=1}^{n} \mu_i / \text{Tr}(S) = 1$ et $x_{\geq 0}$ donc $x \in W$

Donc la valeur en x est inférieure ou égale au maximum :

$\varphi(x) = \left(\prod_{i=1}^{n} \mu_i\right) / (\text{Tr}(S))^n \leq \varphi(M) = \left(\dfrac{1}{n}\right)^n$ d'où $\boxed{\prod_{i=1}^{n} \mu_i \leq \left(\dfrac{\text{Tr}S}{n}\right)^n}$

L'égalité est atteinte au seul maximum, M, donc si et seulement $\mu_i / \text{Tr}(S) = \dfrac{1}{n}$ pour tout i .

On a alors les μ_i tous égaux. Et réciproquement, s'ils sont tous égaux, $\mu_i / \text{Tr}(S) = \dfrac{1}{n}$ pour tout i.

Donc $\boxed{\text{égalité} \iff S \text{ est un multiple de } I_n}$

(g) Dans cette question, on note $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ une liste étendue des valeurs propres de ${}^tA\,A$.

On définit l'application Δ sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \gneqq(x) = \prod_{i=1}^{n} (x + \lambda_i).$$

Montrer alors que pour tout réel $x \geq 0$,

$$\Delta(x) \leq \left(\frac{tr\left(xI_n + \ {}^tA\ A\right)}{n}\right)^n = \left(\frac{nx + \lambda_1 + ... + \lambda_n}{n}\right)^n.$$

La matrice $S + xI$ a pour liste étendue de valeurs propres $(x + \lambda_i)_{i \in [[1,n]]}$ (en partant de l'écriture diagonalisée $S = PDP^{-}$ et $S + xI = P\left(D + xI\right)P^{-1}$ qui donne la liste étendue des valeurs propres)

Pour tout $x \geq 0$, $S + xI$ est symétrique à valeurs propres positives ou nulles. (les λ_i le sont déjà donc les $x + \lambda_i$ également)

Donc (question f)) $\prod_{i=1}^{n}(x + \lambda_i) \leq \left(\frac{\mathrm{Tr}\left(S + xI\right)}{n}\right)^n$ avec $\mathrm{Tr}\left(S + xI\right) = \sum_{i=1}^{n}(x + \lambda_i) = nx + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ d'où

$$\boxed{\Delta(x) \leq \left(\frac{tr\left(xI_n + \ {}^tA\ A\right)}{n}\right)^n = \left(\frac{nx + \lambda_1 + ... + \lambda_n}{n}\right)^n}$$

Partie III - Étude de deux cas particuliers.

9. (a) Montrer que la trace de toute matrice représentant l'endomorphisme f est r.

La trace est invariante par changement de base car $\mathrm{Tr}\left(AB\right) = \mathrm{Tr}\left(BA\right)$ donc $\mathrm{Tr}\left(PDP^{-1}\right) = \mathrm{Tr}\left(DPP^{-1}\right) = \mathrm{Tr}\left(D\right)$

Pour un projecteur, $\mathrm{Ker}\left(f - \mathrm{Id}\right) \oplus \mathrm{Ker}\left(f\right) = E$ et la juxtaposition de leurs bases est une base de E dans laquelle la matrice de p est diag,$(1, \cdots, 1, 0 \cdots, 0)$ donc

$\boxed{\text{la trace de toute matrice représentant l'endomorphisme } f \text{ est } r.}$

(b) On reprend les notations de la question 6) selon lesquelles

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} A_1 & 0_{r,n-r} \\ A_3 & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}$$

Vérifier que $A_1^2 = A_1$ et que $tr(A_1) = r$, et en déduire la matrice A_1.

Comme f est un projecteur $f^2 = f$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)^2 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$

Avec$\begin{pmatrix} A_1 & 0_{r,n-r} \\ A_3 & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & 0_{r,n-r} \\ A_3 & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^2 & 0_{r,n-r} \\ A_3A_1 & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}$

donc $\boxed{A_1^2 = A_1}$

$\mathrm{Tr}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)\right) = \mathrm{Tr}\left(A_1\right)$ donc $\boxed{\mathrm{Tr}\left(A_1\right) = r}$

Donc, A_1 est une matrice de projecteur d'ordre r et de rang r Donc $\boxed{A_1 = I_r}$

En effet, le rang d'une projection est sa trace. Donc (th du rang) $\dim\left(\mathrm{Ker}\left(A\right)\right) = 0$ et donc $\dim\left(\mathrm{Ker}\left(A - I_r\right)\right) = r$ (supplémentaires dans $\mathcal{M}_{n,1}\left(\mathbb{R}\right)$)

et $\mathrm{Ker}\left(A - I_r\right) = \mathcal{M}_{n,1}\left(\mathbb{R}\right)$

(c) Montrer alors que les valeurs propres non nulles de ${}^tA\ A$ sont supérieures ou égales à 1 et que $tr\left({}^tA\ A\right) \geq r$.

On a donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} I & 0_{r,n-r} \\ A_3 & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix} = B$ semblable à A

$${}^tB\ B = \begin{pmatrix} I & {}^tA_3 \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0_{r,n-r} \\ A_3 & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I + {}^tA_3\ A_3 & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}$$

matrices de s_f dans la base $\mathcal{C}$.

D'après 6.c) $I + {}^tA_3\ A_3 = D$ matrice diagonale des valeurs propres non nulles de ${}^tA\ A$.

Donc ${}^tA_3\ A_3 = D - I$ est diagonale.

(J'aimerais ici, utiliser la question 8. avec $S = {}^tA_3\ A_3$... ?)

les valeurs propres de ${}^tA_3\ A_3$ sont positives ou nulles, donc celles de $I + {}^tA_3\ A_3$ sont $\geqslant 1$.

Donc $D = I + {}^tA_3\ A_3$ est une matrice diagonale dont tous les termes sont $\geqslant 1$

Donc les $\boxed{\text{valeurs propres non nulles de } {}^tA\ A \text{ sont supérieures ou égales à 1}}$

En partant de l'écriture diagonalisée, $\text{Tr}\left({}^tA\ A\right)$ est la somme de r termes $\geqslant 1$ donc $\boxed{tr\left({}^tA\ A\right) \geqslant r.}$

(d) Quels sont les projecteurs pour lesquels $tr\left({}^tA\ A\right) = r$?
Si $tr\left({}^tA\ A\right) = r$ alors $\text{Tr}\left({}^tA_3\ A_3\right) = 0$ donc $\|A_3\| = 0$ donc $A_3 = 0$ et
$\boxed{f \text{ est une projection orthogonal de rang } r}$ (sur un sous espace de dimension r)

10. On suppose dans cette question que f est une symétrie, c'est-à-dire $f^2 = \text{Id}$.

(a) Justifier que ${}^tA\ A$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de A et de ${}^tA$.
Comme $f^2 = \text{Id}$, $A^2 = I$ donc A est inversible (et $A^{-1} = A$) donc ${}^tA$ est inversible donc (produit)
$\boxed{{}^tA\ A \text{ est inversible et } \left({}^tA\ A\right)^{-1} = A^{-1}\ {}^tA^{-1} = A\ {}^tA}$

(b) Montrer que si λ est une valeur propre de ${}^tA\ A$, alors $\dfrac{1}{\lambda}$ est aussi une valeur propre de ${}^tA\ A$ et que

$$\dim E_\lambda\left({}^tA\ A\right) = \dim E_{1/\lambda}\left({}^tA\ A\right)$$

si λ est une valeur propre de ${}^tA\ A$, (inversible alors $\lambda \neq 0$) et que X est un vecteur propre associé alors ${}^tA\ AX = \lambda X$
donc (produit par l'inverse) $X = \lambda A\ {}^tA\ X$ et $A\ {}^tA\ X = \dfrac{1}{\lambda}X$ donc $\dfrac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de $A\ {}^tA$ donc de τ_f.
Or, τ_f et s_f ont les mêmes valeurs propres.
Donc $\boxed{\dfrac{1}{\lambda} \text{ est aussi une valeur propre de } {}^tA\ A}$
On a obtenu que si X était vecteur propre de ${}^tA\ A$ associé à λ alors X était vecteur propre de $A\ {}^tA$ associé à $\dfrac{1}{\lambda}$.
On a la réciproque de la même façon. Donc, les sous espaces propres $E_\lambda\left({}^tA\ A\right)$ et $E_{1/\lambda}\left(A\ {}^tA\right)$ sont égaux.
Et comme $\dim\left(E_{1/\lambda}\left(s_f\right)\right) = \dim\left(E_{1/\lambda}\left(\tau_f\right)\right)$ on a finalement
$\boxed{\dim E_\lambda\left({}^tA\ A\right) = \dim E_{1/\lambda}\left({}^tA\ A\right)}$

(c) Vérifier que pour tout x réel strictement positif on a :

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

puis établir l'équivalence logique

$$x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x = 1$$

Signe de la différence : $x + \frac{1}{x} - 2 = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x} = \dfrac{1}{x}(x-1)^2$
donc, $\boxed{\text{pour tout } x > 0 : x + \frac{1}{x} \geqslant 2 \text{ et } x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x = 1}$

(d) On note $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ une liste étendue des valeurs propres de ${}^tA\ A$. Montrer que

$$\prod_{i=1}^{n}(1 + \lambda_i) \geq 2^n.$$

${}^tA\ A$ est à valeurs propres positives ou nulles donc
pour tout $i : 1 + \lambda_i \geqslant 1$ et comment obtenir une quantité $\geqslant 2$, il faudrait que $\lambda \geqslant 1$? ? ?
On revient à la question b) : λ valeur propre $\Longleftrightarrow \dfrac{1}{\lambda}$ valeur propre, à chaque valeur propre < 1, correspond une valeur propre > 1.
Et dans le produit : $\lambda > 0 : (1 + \lambda)\left(1 + \dfrac{1}{\lambda}\right) = 2 + \lambda + \dfrac{1}{\lambda} \geqslant 4$ et on détaille :
Si λ_i est une valeur propre répétée k fois dans la liste étendue alors $1/\lambda_i$ est valeur propre répétée k fois également (égalité des dimensions des sous espaces propres associés)

ET RECIPROQUEMENT

Donc une autre liste étendue des valeurs propres est $(1/\lambda_1, ..., 1/\lambda_n)$

Ces deux listes sont donc des permutations l'une de l'autre (elle comprennent les mêmes éléments dans des ordres distincts)

$\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i) = \prod_{i=1}^{n}\left(1+\dfrac{1}{\lambda_i}\right)$ et $\left(\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i)\right)^2 = \prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i)\left(1+\dfrac{1}{\lambda_i}\right) \geqslant 4^n$

Donc (termes positifs) $\boxed{\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i) \geqslant \sqrt{4^n} = 2^n}$

(e) Quelles sont les matrices pour lesquelles $\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i) = 2^n$? Montrer que cette égalité correspond au cas où f est une symétrie orthogonale, ce qui signifie que les sous-espaces $E_1(f)$ et $E_{-1}(f)$ sont orthogonaux.

$\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i) = 2^n$ si et seulement si tous les termes $(1+\lambda_i)\left(1+\dfrac{1}{\lambda_i}\right) = 2+\lambda_i+\dfrac{1}{\lambda_i}$ valent 4.

C'est à dire si $\lambda_i + \dfrac{1}{\lambda_i} = 2$, c'est à dire si (et seulement si) $\lambda_i = 1$ pour tout λ.

Donc $\boxed{\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i) = 2^n \Longleftrightarrow {}^tA\,A = I}$

Correspond au cas : équivalence

$\Longleftrightarrow {}^tA = A^{-1} = A$

ce qui signifie que f est un endomorphisme symétrique, DONC que ses sous espaces propres sont orthogonaux. $(E_1(f) \perp E_{-1}(f))$

Réciproquement, si $E_1(f) \perp E_{-1}(f)$),la juxtaposition de bases orthonormée de chacun, sera une base orthonormée de E.

Dans cette base orthonormée, la matrice de f sera diagonale, donc symétrique, et, donc dans toute base orthonormée la matrice de f sera symétrique.

$\boxed{\text{cette égalité correspond au cas où } f \text{ est une symétrie orthogonale,}}$

Partie IV - Décomposition polaire.

11. Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ et n réels strictement positifs $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tels que

$$\forall i \in [[1,n]], s_f(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i,$$

et on pose alors

$$\forall i \in [[1,n]], v(\varepsilon_i) = \sqrt{\lambda_i}\varepsilon_i.$$

Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme v de $\mathbb{R}^n$ tel que $v \in S^+(\mathbb{R}^n)$ et $v^2 = s_f$.

A est inversible, donc, ${}^tA\,A$ est inversible et <u>0 n'est pas valeur propre.</u>

Donc, toutes les valeurs propres de ${}^tA\,A$, c'est à dire de s_f, sont strictement positives.

s_f étant symétrique, il existe une base base orthonormée de vecteurs propres $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ et n réels strictement positifs $\lambda_1, ..., \lambda_n$ (une liste étendue des valeurs propres) tels que

$\boxed{\forall i \in [[1,n]], s_f(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i,}$

L'image d'une base définit un endomorphisme de E donc $\boxed{v \text{ est bien défini.}}$

La matrice de v dans la base orthonormée $\mathcal{C}$ est diagonale donc, symétrique.

Les valeurs propres de v sont les $\sqrt{\lambda_i} \geqslant 0$.

Donc $\boxed{v \in S^+(\mathbb{R}^n)}$

Et, pour tout i : $v^2(\varepsilon_i) = v\left(\sqrt{\lambda_i}\varepsilon_i\right) = \lambda_i\varepsilon_i = s_f(e_i)$

v et s_f sont deux endomorphismes de E qui coïncident sur une base et

$\boxed{v^2 = s_f.}$

12. Soit w un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $w \in S^+(\mathbb{R}^n)$ et $w^2 = s_f$.

Montrer que, pour toute valeur propre μ de w, on a $E_\mu(w) \subset E_{\mu^2}(s_f)$, et montrer ensuite que

$$E_\mu(w) = E_{\mu^2}(s_f) \text{ et } \mathrm{Sp}(w) = \left\{\sqrt{\lambda} \;/\; \lambda \in Sp(s_f)\right\}.$$

Soit $x \in E_\mu(w)$ alors $w(x) = \mu x$ et $w^2(x) = \mu^2 x = s(x)$ avec $x \neq 0$ donc μ^2 valeur propre de s_f et $x \in E_{\mu^2}(s_f)$

Donc $\boxed{E_\mu(w) \subset E_{\mu^2}(s_f)}$

Réciproquement, on passe par la somme des dimensions des sous espaces propres.

MAIS μ et $-\mu$ auront les mêmes carrés.

Comme les $\mu \in \mathrm{Sp}(w)$ sont positifs, les μ^2 pour $\mu \in \mathrm{Sp}(w)$ sont distincts.

w est diagonalisable donc $\sum_{\mu\in\mathrm{Sp}(w)} \dim E_\mu(w) = \dim E$

et $\dim E_\mu(w) \leqslant \dim E_{\mu^2}(s_f)$ donc $\sum_{\mu\in\mathrm{Sp}(w)} \dim E_\mu(w) \leqslant \sum_{\mu\in\mathrm{Sp}(w)} \dim E_{\mu^2}(s_f)$

Les μ^2 sont distincts,

donc les sous espaces propres $E_{\mu^2}(s_f)$ pour $\mu \in \mathrm{Sp}(w)$ sont en somme directe et

$n \leqslant \sum_{\mu\in\mathrm{Sp}(w)} \dim E_{\mu^2}(s_f) = \dim\left(\bigoplus_{\mu\in\mathrm{Sp}(w)} E_{\mu^2}(s_f)\right) \leqslant n$

Finalement, $\dim E_\mu(w) \leqslant \dim E_{\mu^2}(s_f)$ et $\sum_{\mu\in\mathrm{Sp}(w)} \dim E_\mu(w) = \sum_{\mu\in\mathrm{Sp}(w)} \dim E_{\mu^2}(s_f)$

donc $\dim E_\mu(w) = \dim E_{\mu^2}(s_f)$ pour tout $\mu \in \mathrm{Sp}(w)$

Donc $\boxed{E_\mu(w) = E_{\mu^2}(s_f) \text{ pour tout } \mu \in \mathrm{Sp}(w)}$

Et comme $\bigoplus_{\mu\in\mathrm{Sp}(w)} E_{\mu^2}(s_f) = E$, s_f n'a pas d'autres valeurs propres.

Donc $\mathrm{Sp}(s_f) = \{\mu^2 \ / \ \mu \in \mathrm{Sp}(w)\}$ et $\boxed{\mathrm{Sp}(w) = \left\{\sqrt{\lambda} \ / \ \lambda \in Sp(s_f)\right\}}$

13. En déduire qu'il existe un unique endomorphisme v de $\mathbb{R}^n$ tel que $v \in S^+(\mathbb{R}^n)$ et $v^2 = s_f$ et que, dans toute base orthonormée de vecteurs propres de s_f, la matrice de v est diagonale.

<u>On a l'existence</u> par la question 11. de $v \in S^+(\mathbb{R}^n)$ tel $v^2 = s_f$,

et d'après 12., v et s_f ont même vecteurs propres.

Donc dans toute base orthonormée de vecteurs propres de s_f, est une base de vecteurs propres de v, et sa matrice y est donc diagonale.

<u>Unicité :</u> Soit v un tel endomorphisme de E.

D'après 12. ses valeurs propres sont $\left\{\sqrt{\lambda} \ / \ \lambda \in Sp(s_f)\right\}$ et ses sous espaces propres sont $E_\mu(v) = E_{\mu^2}(s_f)$ pour tout $\mu \in \mathrm{Sp}(w)$.

Un endomorphisme est défini par sa restriction à une famille de sous espaces supplémentaires.

Les sous espace propres étant supplémentaires, et $v(x) = \mu_i x$ sur $E_{\mu_i}(v)$ cela défini donc un unique v

D'où $\boxed{\text{l'existence et l'unicité de } v \in S^+(\mathbb{R}^n) \text{ tel que } v^2 = s}$

14. En déduire qu'il existe une unique matrice notée $\sqrt{{}^tA\,A}$ appartenant à $S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $\left(\sqrt{{}^tA\,A}\right)^2 = {}^tA\,A$.

Une matrice M appartenant à $S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $\left(\sqrt{{}^tA\,A}\right)^2 = {}^tA\,A$ est une matrice canoniquement associée à un endomorphisme w symétrique dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles et tel que $w^2 = s_f$

D'après, 13, cet endomorphisme existe et est unique.

Donc $\boxed{\text{il existe une unique matrice } M \text{ appartenant à } S_n^+(\mathbb{R}) \text{ telle que } M^2 = {}^tA\,A}$

15. Vérifier que la matrice $A\left(\sqrt{{}^tA\,A}\right)^{-1}$ est orthogonale. Montrer alors qu'il existe un unique couple

$$(\Omega, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times S_n^+(\mathbb{R})$$

tel que $A = \Omega S$. C'est ce qu'on appelle la décomposition polaire de A.

C'est une matrice carrée. On teste si sa transposée est bien son inverse :

$$\begin{aligned}
& {}^t\!\left(A\left(\sqrt{{}^tA\,A}\right)^{-1}\right) A\left(\sqrt{{}^tA\,A}\right)^{-1} \\
= \ & {}^t\!\left(\sqrt{{}^tA\,A}\right)^{-1} \, {}^tA\,A\left(\sqrt{{}^tA\,A}\right)^{-1} \\
= \ & {}^t\!\left(\sqrt{{}^tA\,A}\right)^{-1} \sqrt{{}^tA\,A}^2 \left(\sqrt{{}^tA\,A}\right)^{-1} \\
= \ & I
\end{aligned}$$

donc $\boxed{A\left(\sqrt{{}^t\!A\,A}\right)^{-1} \text{ est orthogonale.}}$

On a $S=\sqrt{{}^t\!A\,A}\in S_n^+(\mathbb{R})$ et $\Omega=A\left(\sqrt{{}^t\!A\,A}\right)^{-1}$ orthogonale

et $AS^{-1}=\Omega$ donc $A=\Omega S$ et l'existence de la décomposition

Unicité : si $(\Omega,S)\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})\times S_n^+(\mathbb{R})$ tels que $A=\Omega S$

on voudrait que $S^2={}^t\!A\,A$.

Or, $S=\Omega^{-1}A={}^t\Omega\,A$

Or S symétrique donc $S^2={}^tS\,S={}^t\!A\,\Omega\,{}^t\Omega\,A={}^t\!A\,A$ car $\Omega\,{}^t\Omega=I$

Et comme $\sqrt{{}^t\!A\,A}$ est l'une unique matrice symétrique à valeurs propres positives donc le carré est ${}^t\!A\,A$, alors $S=\sqrt{{}^t\!A\,A}$ d'où la valeur de $\Omega=A\left(\sqrt{{}^t\!A\,A}\right)$.

Il y a donc un $\boxed{\text{unique couple } (\Omega,S)\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})\times S_n^+(\mathbb{R}) \text{ tel que } A=\Omega S.}$

Partie V - Application à la distance d'une matrice inversible à l'ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

16. Justifier que $d(M)$ est bien définie.

    $\{\|M-V\|_2\ /\ V\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})\}$ est un ensemble non vide et minoré par 0. Donc il a une borne inférieur.

    Donc $\boxed{d(M) \text{ est bien définie.}}$

17. Soit $R\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\forall N\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\quad \|RN\|_2=\|NR\|_2=\|N\|_2$

    Montrer que les applications $V\longmapsto VR^{-1}$ et $V\longmapsto R^{-1}V$ sont des bijections de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ sur lui-même.

    En déduire que $d(M)=d(RM)=d(MR)$

    $\|RN\|_2^2=\mathrm{Tr}\left({}^tN\,{}^tR\,RN\right)={}^tN\,N=\|N\|_2^2$ car ${}^tR\,R=I_n$

    $\|NR\|_2^2=\mathrm{Tr}\left({}^tR\,{}^tN\,NR\right)=\mathrm{Tr}\left({}^tN\,N\,{}^tR\,R\right)=\|N\|_2^2$ car $\mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}(BA)$ pour toutes matrices A et B

    Donc, $\boxed{\forall N\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\quad \|RN\|_2=\|NR\|_2=\|N\|_2}$

    $V\longmapsto VR^{-1}$ est une application de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$:

    Soit $V\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ alors ${}^t\!\left(VR^{-1}\right)VR^{-1}=R\,{}^tV\,V\,{}^tR=I$ et $VR^{-1}\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

    Et elle a pour réciproque $V\mapsto VR$ donc elle est $\boxed{\text{bijective de } \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \text{ dans } \mathcal{O}_n(\mathbb{R})}$

    de même pour $V\longmapsto R^{-1}V$

    $\inf\limits_{V\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})}\|M-V\|_2$ est plus petite que toutes les distances.

    et $\|RM-V\|_2=\left\|M-R^{-1}V\right\|_2$ avec $N=RM-V$

    donc $\inf\limits_{V\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})}\|M-V\|\leqslant\left\|M-R^{-1}V\right\|=\|RM-V\|_2$

    Donc $\inf\limits_{V\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})}\|M-V\|_2$ est un minorant de $\|RM-V\|_2$ pour tout V.

    Donc, le plus grand des minorant, $\inf\limits_{V\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})}\|RM-V\|_2$ est plus grand :

    $\inf\limits_{V\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})}\|RM-V\|_2\geqslant\inf\limits_{V\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})}\|M-V\|_2$ donc $d(RM)\geqslant d(M)$

    Et de même $\inf\limits_{V\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})}\|RM-V\|_2\leqslant\|RM-RV\|_2=\|M-V\|_2$

    donc $\inf\limits_{V\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})}\|RM-V\|_2\leqslant\inf\limits_{V\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})}\|M-V\|_2$ et $d(RM)\leqslant d(M)$

    et $\boxed{d(M)=d(RM)}$

    et de même pour l'autre coté avec $\|NR\|_2=\|N\|_2$

    donc $\boxed{d(M)=d(RM)=d(MR)}$

18. On note $A=\Omega S$ la décomposition polaire de A. On considère une matrice diagonale D à éléments diagonaux strictement positifs et une matrice $P\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que

    $S=PD\times\,{}^tP$ .Vérifier que $d(A)=d(D)$.

    On a, d'après 17, $d(A)=d(PD\times{}^tP)=d(D\times{}^tP)$ car $P\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

    $=d(D)$ car ${}^tP\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

    donc $\boxed{d(A)=d(D)}$

19. Soit $V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ .On note
$$W = \frac{1}{2}\left(V + {}^tV\right),$$
et v l'endomorphisme canoniquement associé à V.

(a) Justifier que W est diagonalisable. On note w l'endomorphisme canoniquement associé à W.

$\boxed{W \text{ est symétrique réelle donc diagonalisable}}$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Vérifier que $\langle w(x)\,|x\rangle = \langle v(x)\,|x\rangle$ et que $\|v(x)\| = \|x\|$.
En déduire que $|\langle w(x)\,|x\rangle| \leq \|x\|^2$ et $\langle x - w(x)\,|x\rangle \geq 0$.
Avec X la colonne des coordonnées de x
$$\begin{aligned}\langle w(x), x\rangle &= \left({}^tX\ {}^tW\ X\right) = \frac{1}{2}\left(\left({}^tX\ {}^tV\ X\right) + \ \left({}^tX\ V\ X\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\langle v(x)\,|x\rangle + \langle x\,|v(x)\rangle\right)\\ &= \langle v(x)\,|x\rangle\end{aligned}$$
et
$$\|v(x)\|^2 = {}^tX\ {}^tV\ VX = {}^tX\ X = \|x\|^2$$
donc $\boxed{\langle w(x)\,|x\rangle = \langle v(x)\,|x\rangle \text{ et que } \|v(x)\| = \|x\|.}$
$\langle w(x)\,|x\rangle = \langle v(x)\,|x\rangle \leqslant \|v(x)\|\,\|x\|$ (Cauchy-Schwarz)
donc $\boxed{|\langle w(x)\,|x\rangle| \leq \|x\|^2}$ et la différence
$\boxed{\|x\|^2 - |\langle w(x)\,|x\rangle| = \langle x - w(x)\,|x\rangle \geq 0}$

(c) Montrer alors que les valeurs propres de $I_n - W$ sont positives ou nulles.
Soit λ valeur propre de $I_n - W$ et X une colonne propre associée
$x - w(x) = (\mathrm{Id} - w)(x) = \lambda x$ et $\langle x - w(x)\,|x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle \geq 0$
Et comme $\|x\| \neq 0$, $\lambda \geq 0$
$\boxed{\text{les valeurs propres de } I_n - W \text{ sont positives ou nulles}}$

(d) On note $W = [w_{ij}]_{(i,j)\in[[1,n]]^2}$. Montrer que, pour tout $i \in [[1,n]]$, $1 - w_{ii} \geq 0$
$w_{ii} = \langle w(e_i), e_i\rangle$ et $\boxed{1 - w_{ii} = \langle e_i - w(e_i), e_i\rangle \geq 0}$

(e) Montrer que, pour tout $i \in [[1,n]]$, on a $w_{ii} = 1$ si, et seulement si,$W = I_n$.
Si $W = I_n$. alors, pour tout i, $w_{ii} = 1$
Si pour tout i, $w_{ii} = 1$, il faut montrer que $W = I_n$
On a alors $\mathrm{Tr}(I_n - W) = 0$ qui est aussi la somme des valeurs propres étendues.
Comme elles sont toutes positives ou nulle, elles sont toutes nulles.
Donc (matrice diagonalisable) $I_n - W = 0$ et $W = I_n$
$\boxed{w_{ii} = 1 \text{ pour tout } i \text{ si, et seulement si,} W = I_n.}$

20. On conserve les notations des questions 18) et 19).

(a) Montrer que $\|D - V\|_2^2 - \|D - I_n\|_2^2 = 2(I_n - V\,|D) = 2(I_n - W\,|D)$
Identité remarquable $\|x\|^2 - \|y\|^2 = \langle x - y, x + y\rangle$ ici :
$$\begin{aligned}\|D - V\|_2^2 - \|D - I_n\|_2^2 &= (D - V + D - I_n \mid D - V - (D - I_n))\\ &= (2D - V - I_n \mid I - V_n)\\ &= 2(D \mid I - V_n) - (V + I_n \mid I - V_n)\\ &= 2(D \mid I - V_n) + \|V\|_2^2 - \|I\|_2^2\end{aligned}$$
et comme V est orthogonale, $\|V\|_2^2 = \mathrm{Tr}\left({}^tV\ V\right) = \mathrm{Tr}(I) = \|I\|_2^2$ donc
$\boxed{\|D - V\|_2^2 - \|D - I_n\|_2^2 = 2(I_n - V\,|D)}$
et comme D est diagonale, $\left\langle {}^tV, D\right\rangle = \mathrm{Tr}(V\ D) = \mathrm{Tr}\left(V\ {}^tD\right) = \mathrm{Tr}\left({}^tD\ V\right) = \langle V, D\rangle$
Donc $\langle V, D\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle V, D\rangle + \left\langle {}^tV, D\right\rangle\right)$ et $\boxed{2(I_n - V\,|D) = 2(I_n - W\,|D)}$

(b) En déduire que $\|D-V\|_2^2-\|D-I_n\|_2^2 \geqslant 0$
$\|D-V\|_2^2-\|D-I_n\|_2^2 = 2\left(I_n - W \,|D\right)$
avec $1-w_{ii} \geqslant 0$
Comme D est diagonale positifs) , les termes de la diagonale de ${}^t(I_n - W)\, D$ sont les $(1-w_{ii})\, d_i \geqslant 0$
Donc Tr $\left({}^tI_n - W\ D\right) \geqslant 0$
donc $\boxed{\|D-V\|_2^2-\|D-I_n\|_2^2 \geqslant 0}$

(c) Montrer alors que $d(A) = \|D-I_n\|_2 = \left\|\sqrt{{}^tA\ A} - I_n\right\|_2$,
et montrer aussi que I_n est l'unique élément V de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $d(A) = \|D-V\|_2$
On a vu que $\boxed{d(A) = d(D)}$
Et, pour tout $V \in \mathcal{O}(\mathbb{R}_n)$: $\|D-V\|_2 \geqslant \|D-I_n\|_2$ (fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}_+$)
et $\|D-I_n\|_2$ est <u>un minorant</u> des $\|D-V\|_2$ pour $V \in \mathcal{O}(\mathbb{R}_n)$ donc $\inf \|D-V\|_2 \geqslant \|D-I_n\|_2$
Et, avec $V = I \in O(\mathbb{R}_n)$, on a aussi $\|D-V\|_2 \geqslant \inf \|D-V\|_2$
Donc $\boxed{\|D-I_n\|_2 = \inf \|D-V\|_2 = d(D)}$
Et comme $\sqrt{{}^tA\ A} = PD\,{}^tP$ avec P orthogonale,
$\sqrt{{}^tA\ A} - I_n = P(D-I_n)\,{}^tP$ et $\boxed{\|D-I_n\|_2 = \left\|\sqrt{{}^tA\ A} - I_n\right\|_2}$
Et si $\|D-V\|_2 = \|D-I\|_2$ alors $\|D-V\|_2^2-\|D-I_n\|_2^2 = 0$
donc Tr $\left({}^tI_n - W\ D\right)$, somme de termes positifs ou nuls, *est* nulle.
Donc tous les termes diagonaux sont nuls.
Donc , pour tout i : $(1-w_{ii})\, d_i = 0$ et comme les d_i sont strictement positifs, non nuls, $1-w_{ii} = 0$.
D'où 19.e) $W = I$ et $\frac{1}{2}\left({}^tV + V\right) = I$
$\times V$ on a alors $\frac{1}{2}\left(I + V^2\right) = V$ et $V^2 - 2V + I = 0$ et $(V-I)^2 = 0$
Donc (polynôme annulateur) 1 est la seule valeur propre de V et comme V est diagonalisable, $V = I$
Donc $\boxed{I_n \text{ est l'unique élément } V \text{ de } \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \text{ tel que } d(A) = \|D-V\|_2}$