Devoir surveillé n°6 - type ECRICOME - Lundi 24 mars 2025

Prière de respecter une **marge** suffisante, d'**encadrer** vos résultats,
et de **changer de copie** à chaque nouvel exercice,
en faisant apparaître **votre nom** sur **chaque** copie.

Dans tout le devoir, on suppose que les bibliothèques Python sont déjà importées avec leurs alias habituels :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt
```

Exercice 1

Dans tout l'exercice, a est un réel strictement positif.

Partie A

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\forall x > 0, \varphi(x) = \ln(x) - a\,x^{2a}$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$.
2. Démontrer que si $a < \sqrt{\frac{1}{2e}}$, alors l'équation $\varphi(x) = 0$, d'inconnue réelle x, admet exactement deux solutions z_1 et z_2, avec $z_1 < x_0 < z_2$.
   Que se passe-t-il si $a = \sqrt{\frac{1}{2e}}$? Si $a > \sqrt{\frac{1}{2e}}$?

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'ouvert $U = (\mathbb{R}_+^*)^2$ par

$$\forall (x,y) \in U, \quad f(x,y) = \ln(x)\ln(y) - (xy)^a.$$

3. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.
4. Calculer les dérivées partielles premières de f.
5. Pour tout $(x,y) \in U$, établir l'équivalence suivante : (x,y) est un point critique de f $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x = y \\ \varphi(x) = 0. \end{cases}$
6. Démontrer que si $a < \sqrt{\frac{1}{2e}}$, alors la fonction f admet exactement deux points critiques : (z_1, z_1) et (z_2, z_2), où z_1 et z_2 sont les réels définis dans la partie A.
   Déterminer aussi les éventuels points critiques de f dans les cas où $a = \sqrt{\frac{1}{2e}}$ et $a > \sqrt{\frac{1}{2e}}$.

Partie C

Dans cette partie, on suppose que $a < \sqrt{\frac{1}{2e}}$. On rappelle alors que la fonction f admet exactement deux points critiques : (z_1, z_1) et (z_2, z_2), où z_1 et z_2 sont les réels définis dans la partie A.

7. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction f.
8. Calculer la matrice hessienne de f au point (z_1, z_1). Vérifier que cette matrice peut s'écrire sous la forme

$$\nabla^2 f(z_1, z_1) = \begin{pmatrix} -a^2 {z_1}^{2a-2} & \frac{1}{{z_1}^2} - a^2 {z_1}^{2a-2} \\ \frac{1}{{z_1}^2} - a^2 {z_1}^{2a-2} & -a^2 {z_1}^{2a-2} \end{pmatrix}.$$

9. On note $M = \nabla^2 f(z_1, z_1)$, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   Calculer MX_1 et MX_2, et en déduire les valeurs propres de M.
10. La fonction f présente-t-elle un extremum local en (z_1, z_1) ?
    Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?
11. La fonction f présente-t-elle un extremum local en (z_2, z_2) ?
    Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?

Exercice 2

Soit n un entier strictement positif.

On effectue une série illimitée de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Pour tout entier strictement positif k, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au k-ième tirage.

Pour tout entier strictement positif k, on note S_k la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages : $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$

On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n.

Exemple : avec $n = 10$, si les numéros obtenus aux cinq premiers tirages sont dans cet ordre $2, 4, 1, 5, 9$, alors on obtient :
$S_1 = 2,\ S_2 = 6,\ S_3 = 7,\ S_4 = 12,\ S_5 = 21$ et $T_{10} = 4$.

Partie A

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de X_k ainsi que son espérance.
2. **a.** Déterminer $T_n(\Omega)$.
   b. Calculer $\mathrm{P}(T_n = 1)$.
   c. Montrer que $\mathrm{P}(T_n = n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}$.
3. Dans cette question, $n = 2$. Déterminer la loi de T_2.
4. Dans cette question, $n = 3$. Donner la loi de T_3.
   Vérifier que $\mathrm{E}(T_3) = \frac{16}{9}$.

Partie B

5. Déterminer $S_k(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
6. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.
   a. Exprimer S_{k+1} en fonction de S_k et de X_{k+1}.
   b. En utilisation un système complet d'événements lié à la variable aléatoire S_k, démontrer alors que
   $$\forall i \in [\![k+1, n]\!],\ \mathrm{P}(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} \mathrm{P}(S_k = j).$$
7. **a.** Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}^*$, rappeler la formule du triangle de Pascal liant les nombres $\binom{j-1}{k-1}$, $\binom{j-1}{k}$ et $\binom{j}{k}$.
   b. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier naturel i supérieur ou égal à $k+1$, $\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}$
   c. Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on note $\mathscr{H}_k$ la proposition « $\forall i \in [\![k, n]\!],\ \mathrm{P}(S_k = i) = \frac{1}{n^k}\binom{i-1}{k-1}$ »
   Démontrer par récurrence que pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathscr{H}_k$ est vraie.
8. **a.** Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Comparer les événements $[T_n > k]$ et $[S_k \leq n-1]$.
   b. En déduire que $\forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathrm{P}(T_n > k) = \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k}$.
9. Démontrer que $\mathrm{E}(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{P}(T_n > k)$, puis que $\mathrm{E}(T_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}$.
10. Calculer $\lim_{n \to \infty} \mathrm{E}(T_n)$.
11. On rappelle que la commande `rd.randint(a,b)` simule une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[\![a, b-1]\!]$. Compléter la fonction suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire T_n :

```
def SimulT(n):
    S=0
    k=0
    while ... :
        S= ...
        k= ...
    return ...
```

Partie C

Dans cette partie, on fait varier l'entier n et on étudie la convergence en loi de la suite $(T_n)_{n \geq 1}$ ainsi obtenue.

12. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{P}(Y = k) = \frac{k-1}{k!}$.
    a. Vérifier par le calcul que $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(Y = k) = 1$.
    b. Montrer que Y admet une espérance et calculer cette espérance.
13. Pour tout entier strictement positif k, démontrer que $\lim_{n \to \infty} \mathrm{P}(T_n > k) = \frac{1}{k!}$.
14. Démontrer alors que $(T_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers la variable aléatoire Y.
15. On rappelle qu'en langage Python, l'instruction `rd.randint(1,n+1)` renvoie un entier aléatoire de $[\![1, n]\!]$selon la loi uniforme. Compléter la fonction ci-dessous, qui prend en argument le nombre n de boules contenues dans l'urne, afin qu'elle simule la variable aléatoire T_n :

```python
def simulT(n):
    S = ...
    k = ...
    while ... :
        tirage = rd.randint(1,n+1)
        S = S + tirage
        k = ...
    return k
```

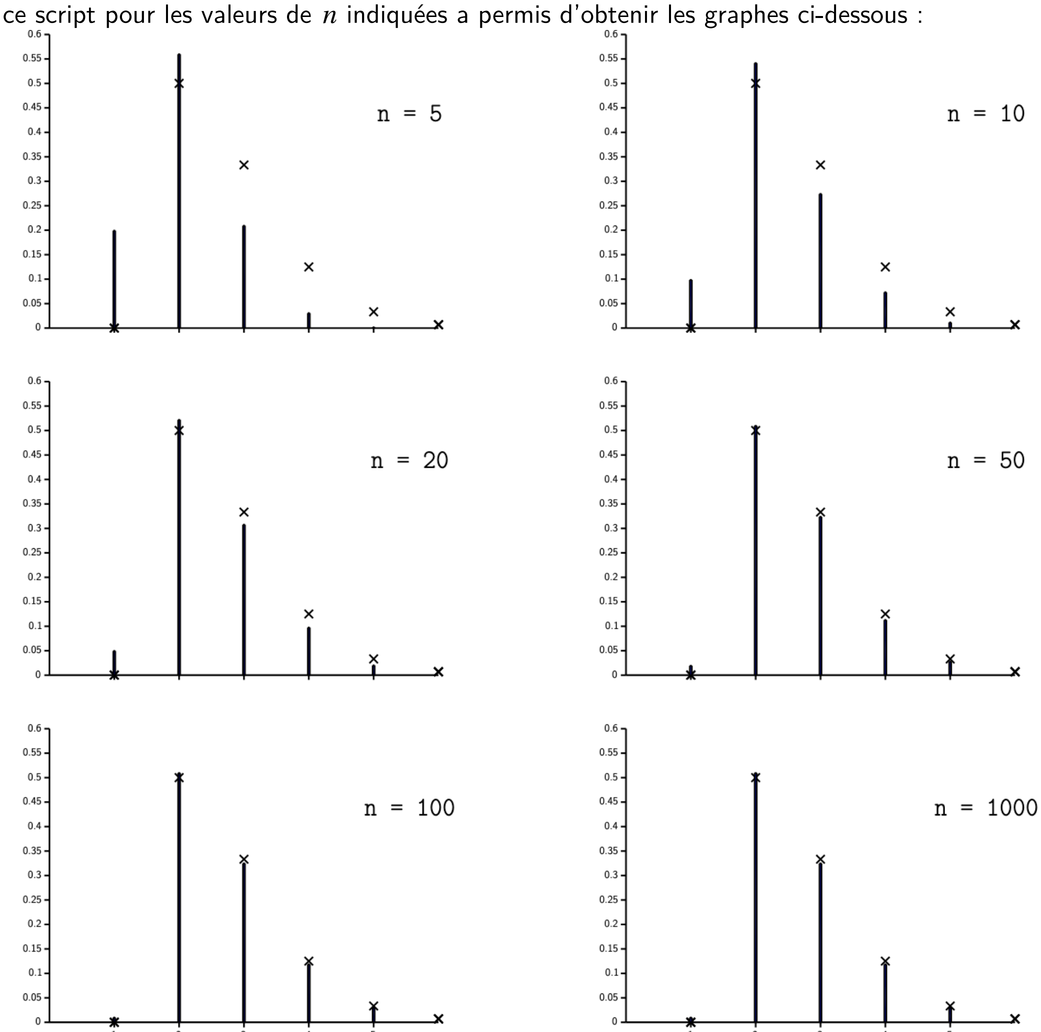
16. On admet que l'appel de `math.factorial(k)` renvoie le nombre $k!$ et on suppose déclarée la fonction précédente et on écrit le script ci-dessous :

```python
def freqT(n):
    tab = np.zeros(n)
    for i in range(100000):
        k = simulT(n)
        tab[k-1] = tab[k-1]+1
    return tab / 100000

def loitheoY(n):
    tab = np.zeros(n)
    for k in range(1,n+1):
        tab[k-1] = (k-1) / math.factorial(k)
        return tab
```

```python
n = int(input('Rentrer la valeur de n :'))
Labs = range(1,6)
x = freqT(n)
debutfreqT = [x[k] for k in range(5)]
plt.bar(Labs, debutfreqT, width=0,1)
plt.plot(Labs, loitheoY(5), 'kx')
```

L'exécution de ce script pour les valeurs de n indiquées a permis d'obtenir les graphes ci-dessous :



a. Expliquer ce que représentent les vecteurs renvoyés par les fonctions `freqT` et `loitheoY`. Comment ces vecteurs sont-ils représentés graphiquement dans chaque graphique obtenu ?

b. Expliquer en quoi cette succession de graphiques permet d'illustrer le résultat de la question 14.

Exercice 3

Les parties B et C sont indépendantes entre elles mais utilisent toutes deux des résultats de la partie A.

Partie A : Réduction d'une matrice

On désigne par $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille 3 à coefficients dans $\mathbb{R}$ et par 0_3 la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -9 & 6 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ ainsi que la fonction polynomiale R définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad R(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3.$$

Pour tout réel λ, on note $X_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la dérivée R' de R admet deux zéros réels distincts r_1 et r_2, avec $r_1 < r_2$, dont on précisera la valeur.
2. Dresser le tableau de variations de R en y ajoutant les valeurs de R en r_1 et r_2.
3. Justifier que R admet trois racines a, b, c avec $0 < a < r_1 < b < r_2 < c$. *On ne cherchera pas à calculer ces racines.*
4. Soit λ un réel, calculer AX_λ puis démontrer que X_λ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ si et seulement si $R(\lambda) = 0$.
5. Établir l'existence d'une matrice inversible P et d'une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$. Expliciter les matrices P et D en fonction des réels a, b, c.

Partie B : Etude d'un endomorphisme

On introduit l'application $f : \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}), \quad f(M) = AM + MA.$$

6. Prouver que f est une application linéaire et que

$$\forall M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}), \quad f(M) = 0_3 \quad \Leftrightarrow \quad DM' + M'D = 0_3$$

où l'on a posé $M' = P^{-1}MP$.

7. Soit $N = \begin{pmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ v & w & x \end{pmatrix}$. Déterminer les neuf coefficients de la matrice $DN + ND$. Que dire de N si $DN + ND = 0_3$?
8. Démontrer que f est un isomorphisme.

Partie C : Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle suivante, d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$: $\quad (E) : \; y''' - 6y'' + 9y' - 3y = 0$
Pour toute fonction y trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on pose $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}$ et $Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix}$.

9. Montrer qu'une fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si $Y' = AY$.
10. **a.** Justifier correctement que $Z' = P^{-1}Y'$ en posant $Z = P^{-1}Y$ et en considérant la matrice P de la question 5.
    b. Montrer qu'une fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si $Z' = DZ$, où $Z = P^{-1}Y$, où P et D sont définies à la question 5.
    c. Montrer que les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions y définies par une expression de la forme :
    $\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \alpha e^{ax} + \beta e^{bx} + \gamma e^{cx}$ où α, β et γ sont des réels et a, b et c les réels définis en question 3.