SUJET ZÉRO n°2

MATHÉMATIQUES APPROFONDIES
VOIE ECG

CONCOURS ECRICOME PRÉPA 2023

Mathématiques approfondies - Sujet zéro 2

EXERCICE 1

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin^n(t)\ \mathrm{d}t$ converge.

On note alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t}\sin^n(t)\ \mathrm{d}t.$$

2. (a) Calculer I_0.

   (b) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

      i. À l'aide d'intégrations par parties, montrer que pour tout réel A strictement positif :

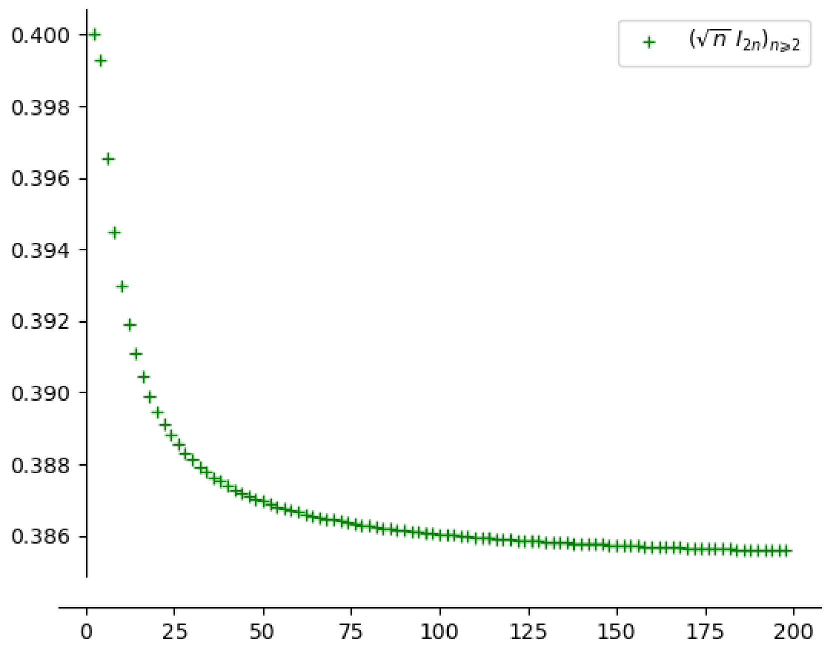
$$\int_0^A e^{-t}\sin^n(t)\ \mathrm{d}t = -e^{-A}\sin^{n-1}(A)(\sin(A)+n\cos(A)) - n\int_0^A e^{-t}\sin^n(t)\mathrm{d}t + n(n-1)\int_0^A e^{-t}\cos^2(t)\sin^{n-2}(t)\ \mathrm{d}t.$$

      ii. En déduire que $I_n = \dfrac{n(n-1)}{n^2+1} I_{n-2}$.

3. (a) Compléter la fonction Python suivante pour que, prenant en argument un entier naturel n, elle calcule et renvoie la valeur de I_{2n}.

```
def calcul(n):
    I=.........
    for k in range(1,n+1):
        I = I * ..........
    return .........
```

   (b) On a représenté ci-dessous la suite $(\sqrt{n}\, I_{2n})_{n\geqslant 1}$ à l'aide du programme Python précédent.
   Que peut-on conjecturer pour un équivalent de I_{2n} lorsque n tend vers $+\infty$?



4. Soit n un entier naturel.
   (a) Justifier l'égalité :
   $$\int_0^{(N+1)\pi} e^{-t}\sin^n(t)\ \mathrm{d}t = \left(\sum_{k=0}^{N}\left((-1)^n e^{-\pi}\right)^k\right)\int_0^{\pi} e^{-t}\sin^n(t)\ \mathrm{d}t$$
   (b) En déduire que :
   $$I_n = \frac{1}{1-(-1)^n e^{-\pi}}\int_0^{\pi} e^{-t}\sin^n(t)\ \mathrm{d}t.$$
   (c) Montrer que : $I_n > 0$.
5. On pose pour tout $n \in \mathbf{N}^*$: $u_n = -\ln(\sqrt{n} I_{2n})$.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\ln\left(\dfrac{2n(2n-1)}{4n^2+1}\right) = \ln\left(1-\dfrac{1}{2n}\right) - \ln\left(1+\dfrac{1}{4n^2}\right)$.
   (b) Montrer, en utilisant la relation obtenue à la question 2, que $u_n - u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{8n^2}$.
   (c) En déduire la nature de la série de terme général $u_n - u_{n-1}$, puis la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.
   (d) Établir l'existence d'une constante strictement positive K telle que $I_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{K}{\sqrt{n}}$.
6. On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$: $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi} e^{-t}\sin^n(t)\ \mathrm{d}t$.
   (a) Déterminer un équivalent de J_{2n} en $+\infty$ faisant intervenir K.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $J_{2n+2} \leqslant J_{2n+1} \leqslant J_{2n}$.
   (c) En déduire un équivalent de J_{2n+1} puis de I_{2n+1} faisant intervenir K.
7. Les suites $(I_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $\left(\sqrt{n} I_n\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ sont-elles convergentes ?

EXERCICE 2

Soit E un espace euclidien de dimension n muni du produit scalaire noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

- Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E, de même dimension d.
- On note p_F le projecteur orthogonal sur F et p_G le projecteur orthogonal sur G.
- Soient $\mathscr{U} = (u_1,\ldots,u_d)$ et $\mathscr{V} = (v_1,\ldots,v_d)$ des bases orthonormées de F et de G respectivement.
  On note B la matrice de $\mathscr{M}_d(\mathbf{R})$ dont le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne est $B_{i,j} = \langle u_i, v_j\rangle$.

1. (a) Vérifier que l'ensemble G est stable par $p_G \circ p_F$, c'est-à-dire que : $\forall x \in G$, $(p_G \circ p_F)(x) \in G$.
   (b) Montrer que l'application π qui à tout élément x de G associe $(p_G \circ p_F)(x)$ est un endomorphisme de G.
   (c) Que vaut π si $F = G$?
   Que vaut π si F et G sont orthogonaux ?
2. On suppose **dans cette question uniquement** que $E = \mathbf{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, et que
   $$F = \Big\{(x,y,z) \in E \ /\ x+y=0\Big\}, \quad G = \Big\{(x,y,z) \in E \ /\ y+z=0\Big\}.$$
   (a) Quelle est la valeur de d dans ce cas-là ?
   (b) Déterminer une base orthonormée $\mathscr{U}$ de F dont le premier vecteur est $u_1 = (0,0,1)$, et une base orthonormée $\mathscr{V}$ de G dont le premier vecteur est $v_1 = (1,0,0)$.
   (c) En déduire une expression de ${}^tBB$.
   (d) Déterminer les valeurs propres de la matrice ${}^tBB$.

3. On revient au cas général dans cette question et les suivantes.

   (a) Soit $x \in G$. Montrer que : $(p_G \circ p_F)(x) = \sum_{i=1}^{d} \left(\sum_{k=1}^{d} \langle u_k, x \rangle \langle u_k, v_i \rangle \right) v_i$.

   (b) En déduire que la matrice de π dans la base $\mathscr{V}$ est ${}^tBB$, puis que π est un endomorphisme symétrique de G.

   (c) Montrer alors qu'il existe un unique d-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \in \mathbf{R}^d$, vérifiant, $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_d$ tel que la matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_d \end{pmatrix}$ soit la matrice de π dans une base orthonormée de E que l'on note $\mathscr{C}$.

4. (a) Établir que pour tout vecteur x de G :

$$\langle x, \pi(x) \rangle = \langle x, p_F(x) \rangle = \|p_F(x)\|^2.$$

   (b) Soit λ une valeur propre de π, et x un vecteur propre associé.
   Montrer que :

$$\lambda \|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2.$$

   En déduire que $\lambda \in [0, 1]$.

5. En déduire que pour tout $k \in [\![1, d]\!]$, il existe un unique $t_k \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, tel que $\lambda_k = \cos^2(t_k)$ où les réels λ_k sont définis à la question 3.(c).

$Angle(F, G)$ **désigne le** d**-uplet** $(t_1, \ldots, t_d)$ **que l'on peut définir pour tout couple** (F, G) **de sous-espaces vectoriels de** E **de même dimension** d**.**

6. <u>*Exemples*</u> :

   (a) Montrer que $Angle(F, G) = \left(\frac{\pi}{2}, \ldots, \frac{\pi}{2} \right)$ si et seulement si F et G sont orthogonaux.

   (b) Montrer que $Angle(F, G) = (0, \ldots, 0)$ si et seulement si F et G sont égaux.

   (c) Déterminer $Angle(F, G)$ si on reprend les hypothèses de la question 2.

PROBLÈME

Dans tout le problème, p désigne un réel de $]0, 1[$.

On réalise une expérience aléatoire qui consiste à effectuer une suite de tests successifs $t_1, \ldots, t_n, \ldots$ sur un objet de la manière suivante:

- Le test t_1 est toujours effectué ;
- Pour tout $i \in \mathbf{N}^*$, sachant que le test t_i a été effectué, soit l'expérience s'arrête alors avec une probabilité p, soit elle continue avec une probabilité $q = 1 - p$ et dans ce cas on réalise le test t_{i+1}.

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ qui modélise cette expérience et on note :

- N la variable aléatoire réelle égale au nombre total de tests effectués lors de l'expérience ;
- Pour tout entier naturel i non nul, T_i la durée aléatoire du test t_i ;
- Pour tout entier naturel k non nul, $D_k = \sum_{i=1}^{k} T_i$;
- D la durée totale de l'expérience, en supposant que seules les durées des tests effectués sont comptabilisées.

On suppose enfin que, pour tout entier naturel i non nul, T_i suit la loi exponentielle de paramètre λ_i, et que cette durée est indépendante des durées des autres tests et de N.

Partie 1 - Loi de D_k

1. Montrer que pour tout entier naturel k non nul, D_k admet une espérance et donner une expression de celle-ci en fonction des λ_i où $i \in [\![1, k]\!]$.

2. Soit λ un réel strictement positif.
   On suppose **dans cette question uniquement** que : $\forall i \in \mathbf{N}^*$, $\lambda_i = \lambda$.
   Déterminer pour tout entier $k \geqslant 1$, une densité de λD_k, puis de D_k.

3. On ne suppose plus à présent que les réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ sont tous égaux.
   On définit par récurrence les fonctions f_k pour tout $k \geqslant 1$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} & \text{sinon} \end{cases}$$

   et

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \forall x \in \mathbf{R}, \qquad f_{k+1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda_{k+1} e^{-\lambda_{k+1} x} \displaystyle\int_0^x f_k(t) e^{\lambda_{k+1} t}\, \mathrm{d}t & \text{sinon.} \end{cases}$$

   (a) Montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, f_k est une densité de probabilité de D_k et que sa restriction à $\mathbf{R}_+$ est continue.

   (b) Donner une expression sans intégrale de $f_2(x)$ pour tout réel x.

4. Soit k un entier supérieur ou égal à 2.
   On suppose dans cette question que les réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ sont distincts 2 à 2.
   On définit pour tout $i \in [\![1, k]\!]$ le réel $\ell_{i,k}$ et le polynôme L_i de $\mathbf{R}[x]$ par :

$$\ell_{i,k} = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} (\lambda_i - \lambda_j)},$$

$$\forall x \in \mathbf{R},\ L_i(x) = \ell_{i,k} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} (x - \lambda_j).$$

   On note enfin P le polynôme défini par : $P = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} L_i$.

   (a) Montrer que $P \in \mathbf{R}_{k-1}[x]$.

   (b) Pour tout $r \in [\![1, k]\!]$, calculer $P(\lambda_r)$.

   (c) En déduire que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} L_i = 1$, puis que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \ell_{i,k} = 0$.

   (d) Montrer, par récurrence que, pour tout entier naturel $k \geqslant 2$:

$$f_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (-1)^{k-1} \lambda_1 \cdots \lambda_k \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \ell_{i,k} e^{-\lambda_i x} & \text{sinon.} \end{cases}$$

5. Soit α un réel strictement positif.
   On suppose dans cette question que, $\forall i \in \mathbf{N}^*$, $\lambda_i = \alpha\, i$.
   Soit k un entier naturel non nul.

   (a) Montrer que $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $\ell_{i,k} = \dfrac{(-1)^{k-i}}{(k-1)!\alpha^{k-1}} \dbinom{k-1}{i-1}$.

   (b) En déduire que pour $x \geqslant 0$, $f_k(x) = k\alpha e^{-\alpha x}(1 - e^{-\alpha x})^{k-1}$.

   (c) Déterminer F_k la fonction de répartition de D_k.

Partie 2 - Loi et espérance de D

6. On suppose que l'on a défini la fonction Python `lamb(i)` qui prend en argument un entier i et qui renvoie la valeur de λ_i.
Compléter le script suivant pour qu'il affiche une valeur aléatoire qui suit la même loi que D :

```
import numpy.random as rd
p=input('p=')
i=1 # numero du test
D=rd.exponential(1/lamb(1))
while rd.random() > ...... :
    i = i + ......
    D = D + ......
end
print(D)
```

7. (a) Donner la loi de N, et préciser son(ses) éventuel(s) paramètre(s).
   (b) En déduire que :
   $$\forall x \geqslant 0,\ F_D(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1}\mathbf{P}_{[N=k]}([D \leqslant x]),$$
   puis que
   $$\forall x \geqslant 0,\ F_D(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1}F_k(x).$$

8. (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ et $t \in \mathbf{R}_+$: $f_k(t) \leqslant \lambda_1$.
   Indication : On pourra utiliser la définition de la fonction f_k à la question 3.
   (b) Montrer que pour tout réel t, la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} pq^{k-1}f_k(t)$ converge.

   Soit alors la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par :
   $$\forall t \in \mathbf{R},\quad f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1}f_k(t).$$
   (c) On admet, que la restriction de f à $\mathbf{R}_+$ est continue.
   Montrer que pour tout $x \geqslant 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:
   $$0 \leqslant \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n} pq^{k-1}\int_0^x f_k(t)\ \mathrm{d}t \leqslant q^n\lambda_1 x$$
   (d) Montrer que la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ coïncide avec F_D sur $\mathbf{R}_+$.
   (e) En déduire que f est une densité de probabilité de D.

9. Soit λ un réel strictement positif.
On suppose **dans cette question uniquement** que $\forall i \in \mathbf{N}^*$, $\lambda_i = \lambda$
En utilisant le résultat de la question 2, établir que D suit la loi exponentielle de paramètre $p\lambda$.

10. Soit α un réel strictement positif.
On suppose **dans cette question uniquement** que $\forall i \in \mathbf{N}^*$, $\lambda_i = \alpha i$.
   (a) En utilisant les résultats de la partie 1, montrer que la fonction de répartition de D, F_D est définie par :
   $$\forall x \in \mathbf{R},\quad F_D(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{p}{p+qe^{-\alpha x}}\left(1-e^{-\alpha x}\right) & \text{sinon.} \end{cases}$$
   (b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1-F_D(x))\ \mathrm{d}x$ converge et vaut $-\dfrac{1}{\alpha q}\ln(p)$.
   (c) Montrer que pour tout réel $A > 0$,
   $$\int_0^A tf_D(t)\ \mathrm{d}t = -A(1-F_D(A)) + \int_0^A (1-F_D(t))\ \mathrm{d}t.$$
   (d) En déduire que D admet une espérance et préciser sa valeur en fonction de p et α.