CORRIGÉ
DU SUJET ZÉRO n°2

MATHÉMATIQUES APPROFONDIES
VOIE ECG

CONCOURS ECRICOME PRÉPA 2023

Mathématiques approfondies - Sujet zéro 2 - Corrigé

EXERCICE 1

1. Soit $n \in \mathbf{N}$.
$t \mapsto e^{-t}\sin^n(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
On a, pour tout $t \geqslant 0$, $|e^{-t}\sin^n(t)| \leqslant e^{-t}$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge (densité d'une loi exponentielle de paramètre 1).
D'où par comparaison de fonctions positives, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin^n(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin^n(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Toute autre comparaison correcte de la fonction à intégrer est acceptée.

2. (a) $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$ puisqu'on reconnaît l'intégrale d'une densité de la loi exponentielle de paramètre 1.

L'utilisation d'une primitive de $t \mapsto e^{-t}$ pour calculer I_0 est acceptée.

(b) i. Soit A un réel strictement positif.
Notons pour tout entier n supérieur ou égal à 0, $W_n(A) = \int_0^A e^{-t}\sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.

Pour $n \geqslant 2$, on réalise une intégration par parties en posant $u'(t) = e^{-t}$, donc par exemple $u(t) = -e^{-t}$ et $v(t) = \sin^n(t)$, u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, A]$, ce qui permet d'écrire :

$$W_n(A) = \Big[-e^{-t}\sin^n(t)\Big]_0^A + n\int_0^A e^{-t}\sin^{n-1}(t)\cos(t)\mathrm{d}t = -e^{-A}\sin^n(A) + n\int_0^A e^{-t}\sin^{n-1}(t)\cos(t)\mathrm{d}t$$

De même, pour $n \geqslant 2$, en posant cette fois $u'(t) = -e^{-t}$ donc par ex. $u(t) = e^{-t}$, et $v(t) = \sin^{n-1}(t)\cos(t)$, u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, A]$, on obtient :

$$\begin{aligned} n\int_0^A e^{-t}\sin^{n-1}(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t &= n\Big[-e^{-t}\sin^{n-1}(t)\cos(t)\Big]_0^A + n\int_0^A e^{-t}((n-1)\sin^{n-2}(t)\cos^2(t) - \sin^n(t))\mathrm{d}t \\ &= -ne^{-A}\sin^{n-1}(A)\cos(A) + n(n-1)\int_0^A e^{-t}\sin^{n-2}(t)\cos^2(t)\mathrm{d}t - n\int_0^A e^{-t}\sin^n(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

D'où $W_n(A) = -e^{-A}\sin^{n-1}(A)(\sin(A) + n\cos(A)) - nW_n(A) + n(n-1)\int_0^A e^{-t}\cos^2(t)\sin^{n-2}(t)\mathrm{d}x$.

Les intégrations par parties doivent impérativement réalisées sur un segment. On attend des candidats qu'ils explicitent les fonctions u, u', v, v' (ou a minima u et v) et indiquent leur caractère $\mathscr{C}^1$.

ii. De plus :

$$\int_0^A e^{-t}\sin^{n-2}(t)\cos^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^A e^{-t}\sin^{n-2}(t)(1 - \sin^2(t))\mathrm{d}t = W_{n-2}(A) - W_n(A)$$

d'où

$$W_n(A) = -e^{-A}\sin^{n-1}(A)(\sin(A) + n\cos(A)) - nW_n(A) + n(n-1)(W_{n-2}(A) - W_n(A))$$

Or $\lim\limits_{A\to+\infty} -e^{-A}\sin^{n-1}(A)(\sin(A) + n\cos(A)) = 0$ comme produit d'une fonction tendant vers 0 et d'une fonction bornée sur $\mathbf{R}^+$.
Donc en faisant tendre A vers $+\infty$ on obtient :

$$I_n = -nI_n + n(n-1)(I_{n-2} - I_n)$$

ou encore

$$((n+1)+n(n-1))I_n = n(n-1)I_{n-2}$$

Donc $I_n = \dfrac{n(n-1)}{n^2+1} I_{n-2}$.

Les candidats doivent bien faire attention à faire un passage à la limite sur toutes les expressions.

3. (a)

```python
def calcul(n):
    I=1
    for k in range(1,n+1):
        I = I *2*k*(2*k-1)/((2*k)**2+1)
    return I
```

(b) On peut conjecturer que $I_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{K}{\sqrt{n}}$ avec $K>0$ et $K \simeq 0.38$.

Les candidats doivent faire le le lien entre la limite éventuelle de $\sqrt{n} I_{2n}$ et l'équivalent de I_{2n}.

4. Soit n un entier naturel.

(a) D'après la relation de Chasles :

$$\int_0^{(N+1)\pi} e^{-t}\sin^n(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{N}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-t}\sin^n(t)\ \mathrm{d}t$$

Le changement de variable $x = t-k\pi$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-t}\sin^n(t)\mathrm{d}t$ donne

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-t}\sin^n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} e^{-x-k\pi}\sin^n(x+k\pi)\mathrm{d}x = e^{-k\pi}\int_0^{\pi} e^{-x}\left((-1)^k\sin(x)\right)^n\mathrm{d}x$$

D'où $\displaystyle\int_0^{(N+1)\pi} e^{-t}\sin^n(t)\ \mathrm{d}t = \left(\sum_{k=0}^{N}((-1)^n e^{-\pi})^k\right)\int_0^{\pi} e^{-x}\sin^n(x)\mathrm{d}x.$

(b) Puisque $(-1)^n e^{-\pi} \in]-1,1[$ alors $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{N}((-1)^n e^{-\pi})^k = \frac{1}{1-(-1)^n e^{-\pi}}$.

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin^n(t)\ \mathrm{d}t$ converge et vaut I_n. Donc $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^{(N+1)\pi} e^{-t}\sin^n(t)\ \mathrm{d}t = I_n$.

D'où $I_n = \dfrac{1}{1-(-1)^n e^{-\pi}}\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-t}\sin^n(t)\ \mathrm{d}t.$

(c) La fonction $t\mapsto e^{-t}\sin^n(t)$ est continue, non nulle sur $[0,\pi]$, à valeurs positives sur ce segment non réduit à un point, alors $I_n > 0$.

5. On pose pour tout $n\in\mathbf{N}^*$: $u_n = -\ln(\sqrt{n}\, I_{2n})$.

(a) $\forall n\in\mathbf{N}^*$, $\ln\left(\dfrac{2n(2n-1)}{4n^2+1}\right) = \ln\left(\dfrac{4n^2(1-\frac{1}{2n})}{4n^2(1+\frac{1}{4n^2})}\right) = \ln\left(\dfrac{1-\frac{1}{2n}}{1+\frac{1}{4n^2}}\right) = \ln\left(1-\dfrac{1}{2n}\right) - \ln\left(1+\dfrac{1}{4n^2}\right).$

Donc $\ln\left(\dfrac{2n(2n-1)}{4n^2+1}\right) = \ln\left(1-\dfrac{1}{2n}\right) - \ln\left(1+\dfrac{1}{4n^2}\right).$

Les candidats peuvent avoir l'initiative de démarrer également par le côté droit de l'égalité.

(b) Ainsi $u_n - u_{n-1} = \dfrac{1}{2}\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right) - \ln\left(1-\dfrac{1}{2n}\right) + \ln\left(1+\dfrac{1}{4n^2}\right).$

Or $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$, d'où :

$$\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),\quad \ln\left(1-\frac{1}{2n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et

$$\ln\left(1+\frac{1}{4n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Donc $u_{n+1}-u_n = -\frac{1}{2n}-\frac{1}{4n^2}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{8n^2}+\frac{1}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

D'où $u_n - u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{8n^2}$.

(c) La série de terme général $\frac{1}{8n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann.

Or $\frac{1}{n^2} \geqslant 0$. D'où par critère d'équivalence $\sum(u_n-u_{n-1})$ est convergente.

Ou encore la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=2}^{n} u_k - u_{k-1}\right)_{n\geqslant 2}$ converge.

Or, pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = u_1 + \sum_{k=2}^{n}(u_k-u_{k-1})$.

Donc la suite (u_n) converge.

Les candidats doivent bien préciser que les suites sont de signe constant pour appliquer le critère d'équivalence de convergence de séries. Il n'y a aucun théorème au programme sur les séries télescopiques, les candidats doivent redémontrer le lien avec la convergence de (u_n).

(d) Notons ℓ cette limite. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -\ln(\sqrt{n}I_{2n}) = \ell$.

D'où par continuité de l'exponentielle, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\, I_{2n} = e^{-\ell}$.

Posons $K = e^{-\ell}$, alors $K > 0$ et $\sqrt{n}I_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} K$.

Donc $I_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{n}}$.

Il est primordial d'indiquer que $K > 0$, pour avoir l'équivalence $v_n \to K \iff v_n \sim K$

6. (a) D'après la question 4(b), $J_{2n} = (1-e^{-\pi})I_{2n}$. D'où $J_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(1-e^{-\pi})K}{\sqrt{n}}$.

(b) Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $t \in [0,\pi]$, $0 \leqslant \sin(t) \leqslant 1$, donc $e^{-t}\sin^{2n+2}(t) \leqslant e^{-t}\sin^{2n+1}(t) \leqslant e^{-t}\sin^{2n}(t)$, d'où en intégrant de 0 à π, par positivité de l'intégrale : $J_{2n+2} \leqslant J_{2n+1} \leqslant J_{2n}$.

(c) On remarque que $J_{2n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(1-e^{-\pi})K}{\sqrt{n+1}}$ donc $J_{2n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(1-e^{-\pi})K}{\sqrt{n}}$.

Or en divisant par $\frac{(1-e^{-\pi})K}{\sqrt{n}}$ (qui est strictement positif) l'inégalité précédente,

$$\frac{J_{2(n+1)}}{\frac{(1-e^{-\pi})K}{\sqrt{n}}} \leqslant \frac{J_{2n+1}}{\frac{(1-e^{-\pi})K}{\sqrt{n}}} \leqslant \frac{J_{2n}}{\frac{(1-e^{-\pi})K}{\sqrt{n}}}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{J_{2(n+1)}}{\frac{(1-e^{-\pi})K}{\sqrt{n}}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{J_{2n+1}}{\frac{(1-e^{-\pi})K}{\sqrt{n}}} = 1$.

Donc par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{J_{2n+1}}{\frac{(1-e^{-\pi})K}{\sqrt{n}}} = 1$ Ainsi $J_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(1-e^{-\pi})K}{\sqrt{n}}$.

De plus $I_{2n+1} = \frac{1}{1+e^{-\pi}}J_{2n+1}$, d'où $I_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(1-e^{-\pi})K}{(1+e^{-\pi})\sqrt{n}}$.

Aucun théorème d'encadrement sur les équivalents n'est au programme. Les candidats doivent prendre l'habitude de démontrer uniquement des limites par encadrement.

7. Les suites $(I_{2n})_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(I_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}^*}$ convergent vers 0, d'où $(I_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers 0.

   Par contre $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{2n}\,I_{2n} = K\sqrt{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{2n+1}\,I_{2n+1} = \dfrac{(1-e^{-\pi})K\sqrt{2}}{(1+e^{-\pi})}$.
   Ces deux limites étant différentes, la suite $(\sqrt{n}\,I_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ ne converge pas.

EXERCICE 2

1. (a) Soit $x\in G$, $(p_G\circ p_F)(x) = p_G(p_F(x))$.
   Or $\mathrm{Im}(p_G) = G$ d'où $p_G(p_F(x))\in G$, donc $(p_G\circ p_F)(x)\in G$.
   Ainsi G est stable par $p_G\circ p_F$

   (b) L'application π qui à tout élément x de G associe $(p_G\circ p_F)(x)$ est linéaire par composition d'applications linéaires, et, d'après la question (a), vérifie : $\forall x\in G, \pi(x)\in G$.
   D'où π est un endomorphisme de G.

   (c) **Si** $F = G$, alors pour tout $x\in G$, $(p_G\circ p_F)(x) = p_G(x) = x$.
   Ainsi, si $F = G$, alors $\pi = Id_G$

   Si F **et** G **sont orthogonaux** , alors pour tout $x\in G$, $p_F(x) = 0$, d'où $(p_G\circ p_F)(x) = p_G(p_F(x)) = 0$.
   Ainsi, si F et G sont orthogonaux, alors $\pi = 0$

2. (a) Ici F et G sont des noyaux de formes linéaires non nulles de $\mathbf{R}^3$, ce sont donc des hyperplans de $\mathbf{R}^3$, donc des plans vectoriels.
   Ainsi, $d = 2$ dans ce cas .

   (b) u_1 est un vecteur de F de norme 1.
   F est de dimension 2. Donc il suffit de chercher un vecteur $u_2 = (x,y,z)$ de norme 1 tel que $x+y=0$ et $\langle u_1,u_2\rangle = 0$ i.e. $z=0$ pour que (u_1,u_2) forme une base orthonormée de F.
   Le vecteur $u_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$ convient, et alors (u_1,u_2) est une base orthonormée de F.

   De même, en notant $v_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$, la famille (v_1,v_2) est une base orthonormée de G.

   Les vecteurs u_2 et v_2 ne sont pas uniques.

   (c) D'où $B = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$ et ${}^tBB = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 3\end{pmatrix}$.

   Les matrices B et ${}^tBB$ dépendent des vecteurs u_2 et v_2 choisis à la question précédente.

   (d)

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ est une valeur propre de } {}^tBB &\iff \det({}^tBB-\lambda I_2) = 0\\
&\iff \left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\left(\frac{3}{4}-\lambda\right)-\frac{1}{8} = 0\\
&\iff (1-2\lambda)(3-4\lambda)-1 = 0\\
&\iff 8\lambda^2-10\lambda+2 = 0\\
&\iff \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

   Le spectre de ${}^tBB$ est donc $\left\{\dfrac{1}{4},1\right\}$.

3. (a) Soit $x \in G$. Comme $\mathscr{U}$ est une base orthonormée de F, $p_F(x) = \sum_{k=1}^{d} \langle u_k, x\rangle u_k$.

Et comme $\mathscr{V}$ est une base orthonormée de G,

$$p_G(p_F(x)) = \sum_{i=1}^{d} \langle v_i, p_F(x)\rangle v_i$$

Donc pour tout x de G, $p_G(p_F(x)) = \sum_{i=1}^{d} \left(\sum_{k=1}^{d} \langle u_k, x\rangle \langle u_k, v_i\rangle \right) v_i$.

(b) Pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$, $(p_G \circ p_F)(v_j) = \sum_{i=1}^{d} \left(\sum_{k=1}^{d} \langle u_k, v_j\rangle \langle u_k, v_i\rangle \right) v_i$.

Or le coefficient de $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne de ${}^tBB$ est $\sum_{k=1}^{d} \langle u_k, v_j\rangle \langle u_k, v_i\rangle$.

Donc la matrice de π dans la base $\mathscr{V}$ est ${}^tBB$.

Or ${}^tBB$ est symétrique et que $\mathscr{V}$ est orthonormée. Donc π est symétrique.

(c) **Existence** Pour l'existence, π est diagonalisable dans une base orthonormée qu'il suffit d'ordonner suivant l'ordre décroissant des valeurs propres associées.

Unicité Supposons par l'absurde qu'il existe deux d-uplets $(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$, $(\lambda'_1, \dots, \lambda'_d)$ distincts qui conviennent. Alors il existe k un entier de $[\![1, d]\!]$ tel que $\lambda_k \neq \lambda'_k$. On peut supposer que $\lambda_k > \lambda'_k$.
Soit $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ les bases orthonormées associées.

Alors $\sum_{\substack{\lambda \in Sp({}^tBB) \\ \lambda \geqslant \lambda_k}} \dim(E_\lambda({}^tBB)) \geqslant k$ puisque les k premiers vecteurs de $\mathscr{C}$ sont dans de tels sous-espaces propres, et $\sum_{\substack{\lambda \in Sp({}^tBB) \\ \lambda < \lambda_k}} \dim(E_\lambda({}^tBB)) \geqslant n-k+1$ puisque les $n-k+1$ derniers vecteurs de $\mathscr{C}'$ sont dans de tels sous-espaces propres.

On a alors que $\sum_{\lambda \in Sp({}^tBB)} \dim(E_\lambda({}^tBB)) \geqslant n+1$ ce qui est absurde. D'où l'unicité.

Toute initiative sur la partie unicité sera valorisée.

4. (a) Le projecteur π_G est orthogonal, donc l'endomorphisme π_G est symétrique.
Soit $x \in G$. Alors :

$$\langle x, \pi(x)\rangle = \langle x, (p_G \circ p_F)(x)\rangle = \langle p_G(x), p_F(x)\rangle = \langle x, p_F(x)\rangle. \quad \text{car } p_G(x) = x \text{ lorsque } x \in G$$

Or $\langle x, p_F(x)\rangle = \langle x - p_F(x), p_F(x)\rangle + \langle p_F(x), p_F(x)\rangle = 0 + \|p_F(x)\|^2$ car $x - p_F(x) \in F^\perp$ et $p_F(x) \in F$.
Donc $\forall x \in G$, $\langle x, \pi(x)\rangle = \langle x, p_F(x)\rangle = \|p_F(x)\|^2$.

(b) ◇ Soit λ une valeur propre de π, et x un vecteur propre associé : on a $x \neq 0$ et $\pi(x) = \lambda x$. Alors :

$$\langle x, \pi(x)\rangle = \langle x, \lambda x\rangle = \lambda\|x\|^2 \qquad \text{et d'après (a), } \langle x, \pi(x)\rangle = \|p_F(x)\|^2$$

D'où $\lambda\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2$.

◇ Comme x est non nul, $\|x\| > 0$, donc $\lambda = \dfrac{\|p_F(x)\|^2}{\|x\|^2} \geqslant 0$.

Or p_F étant un projecteur orthogonal, on a $\|p_F(x)\| \leqslant \|x\|$. Donc $\dfrac{\|p_F(x)\|^2}{\|x\|^2} \leqslant 1$, soit $\lambda \leqslant 1$.

Ainsi $\lambda \in [0, 1]$.

5. Pour tout $k \in [\![1, d]\!]$, $\lambda_k \in [0, 1]$ d'où $\sqrt{\lambda_k} \in [0, 1]$. Il existe un unique $t_k \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, tel que $\sqrt{\lambda_k} = \cos(t_k)$ puisque $t \mapsto \cos(t)$ réalise une bijection de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $[0, 1]$, donc il existe un unique $t_k \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, tel que $\lambda_k = \cos^2(t_k)$.

6. (a) On a vu dans la question 1(c) que si F et G sont orthogonaux, alors $\pi = 0$.
Ainsi, dans ce cas, on a $\forall k \in [\![1, d]\!], \lambda_k = 0$, et alors $\forall k \in [\![1, d]\!],\ t_k = \dfrac{\pi}{2}$.
Réciproquement, si $\forall k \in [\![1, d]\!],\ t_k = \dfrac{\pi}{2}$. alors $\forall k \in [\![1, d]\!], \lambda_k = 0$ d'où $\pi = 0$.
Ainsi d'après 4(a). $\forall x \in G, \langle x, \pi(x)\rangle = 0 = \|p_F(x)\|^2$ d'où $p_F(x) = 0$ donc $G \subset F^\perp$ d'où F et G sont orthogonaux.
Ainsi, F et G sont orthogonaux si et seulement si $Angle(F, G) = \left(\dfrac{\pi}{2}, \ldots, \dfrac{\pi}{2}\right)$

(b) On a vu dans la question 1(c) que si $F = G$ alors $\pi = Id_G$ donc $\forall k \in [\![1, d]\!], \lambda_k = 1$ d'où $\forall k \in [\![1, d]\!], t_k = 0$.

Réciproquement, si $\forall k \in [\![1, d]\!], t_k = 0$ alors $\forall k \in [\![1, d]\!], \lambda_k = 1$ d'où $\pi = Id_G$.
Ainsi $\forall x \in G, \langle x, \pi(x)\rangle = \|x\|^2$ d'où $\|p_F(x)\|^2 = \|x\|^2$.
Or par Pythagore, $\forall x \in G\ \|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2$ donc $x = p_F(x)$ ce qui implique que $G \subset F$. Or, $\dim(G) = \dim(F)$, donc $G = F$.
Ainsi, F et G sont égaux si et seulement si $Angle(F, G) = (0, \ldots, 0)$

(c) Dans la question 2, $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = \dfrac{1}{4}$ d'où $\sqrt{\lambda}_1 = 1$ et $\sqrt{\lambda}_2 = \dfrac{1}{2}$, ainsi $t_1 = 0$ et $t_2 = \dfrac{\pi}{3}$,
Ainsi, dans ce cas, on a $Angle(F, G) = \left(0, \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Problème

Partie 1 - Loi de D_k

1. On a, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $D_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} T_i$.
Or, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $E(T_i)$ existe et vaut $\dfrac{1}{\lambda_i}$ puisque T_i suit une loi exponentielle de paramètre λ_i.
Par linéarité de l'espérance, $E(D_k)$ existe et vaut $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\lambda_i}$.

2. Soit $k \in \mathbf{N}^*$. On a $\lambda D_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda X_i$.
Or, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, X_i suit une loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$, donc λX_i suit une loi exponentielle $\mathscr{E}(1)$.
Par le lemme des coalitions, λX_1, …, λX_k sont indépendantes, donc la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda X_i$ suit une loi $\gamma(k)$. Une densité g_k de λD_k est alors donnée par : $\forall x \in \mathbf{R},\ g_k(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
Comme $D_k = \dfrac{1}{\lambda}(\lambda D_k)$ avec $a = \dfrac{1}{\lambda} \neq 0$, la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{|a|} g_k\left(\dfrac{x}{a}\right)$ est alors une densité de D_k,
autrement dit une densité f_k de D_k est alors donnée par : $\forall x \in \mathbf{R},\ f_k(x) = \begin{cases} \lambda \dfrac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$
autrement dit par : $\forall x \in \mathbf{R},\ f_k(x) = \begin{cases} \lambda^k \dfrac{x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Les candidats doivent pouvoir retrouver rapidement la densité de $aX + b$ lorsque X est une variable aléatoire à densité, ou connaître directement la formule donnant une densité de $aX + b$.

3. (a) **Initialisation** $D_1 = X_1$ et $f_1 : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} & \text{sinon} \end{cases}$ est bien une densité de X_1 puisque X_1 suit une loi $\mathscr{E}(\lambda_1)$.
De plus, la fonction $x \mapsto \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}$ est bien continue sur $\mathbf{R}_+$.

Hérédité Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Supposons que f_k soit une densité de la variable aléatoire D_k, avec f_k continue sur $\mathbf{R}_+$.

Or $D_{k+1} = D_k + X_{k+1}$. Notons $g : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda_{k+1} e^{-\lambda_{k+1} x} & \text{sinon} \end{cases}$ une densité de X_{k+1}.

Par le lemme des coalitions, D_k et X_{k+1} sont indépendantes, et la densité de X_{k+1} est bornée sur $\mathbf{R}$ (puisque $\forall x \in \mathbf{R},\ 0 \leqslant g(x) \leqslant \lambda_{k+1}$), donc $D_k + X_{k+1}$ est une variable aléatoire à densité, et une densité associée est la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$h : x \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(t) g(x-t) \mathrm{d}t.$$

Pour tout x réel, on a : $h(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_k(t) g(x-t) \mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} f_k(t) g(x-t) \mathrm{d}t$ puisque f_k est nulle sur $]-\infty, 0[$.

Si $x < 0$, alors pour tout $t \geqslant 0$, $x - t < 0$, d'où $g(x-t) = 0$, et $h(x) = 0$.

Si $x \geqslant 0$, alors $h(x) = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} f_k(t) g(x-t) \mathrm{d}t = \int_0^x f_k(t) \lambda_{k+1} e^{-\lambda_{k+1}(x-t)} \mathrm{d}t = \lambda_{k+1} e^{-\lambda_{k+1} x} \int_0^x f_k(t) e^{\lambda_{k+1} t} \mathrm{d}t$

Ainsi, on a bien $\forall x \in \mathbf{R},\ h(x) = f_{k+1}(x)$, et la fonction f_{k+1} est bien une densité de D_{k+1}.

Enfin, la fonction $x \mapsto \lambda_{k+1} e^{-\lambda_{k+1} x}$ est continue sur $\mathbf{R}^+$ et la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f_k(t) e^{\lambda_{k+1} t} \mathrm{d}t$ est également continue, en tant que primitive de $t \mapsto f_k(t) e^{\lambda_{k+1} t}$.

Par récurrence, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, f_k est une densité de D_k, et f_k est continue sur $\mathbf{R}_+$.

Il est attendu des candidats qu'ils vérifient les hypothèses nécessaires avant d'écrire le produit de convolution

(b) Pour tout $x \geqslant 0$, on a :

$$f_2(x) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} \int_0^x \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} e^{\lambda_2 t} \mathrm{d}t = \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} \left[\frac{-1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-(\lambda_1 - \lambda_2) t} \right]_0^x = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 x} \left(e^{-(\lambda_1 - \lambda_2) x} - 1 \right)$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbf{R},\ f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda_1 \lambda_2 \dfrac{e^{-\lambda_1 x} - e^{-\lambda_2 x}}{\lambda_2 - \lambda_1} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

4. Soit k un entier supérieur ou égal à 2.

(a) Pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, le polynôme L_i est de degré $k - 1$.
Par somme, P est bien un polynôme, et $\deg(P) \leqslant \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} (\deg(L_i)) = k - 1$.

Ainsi, P appartient à $\mathbf{R}_{k-1}[x]$.

(b) Soit $r \in [\![1, k]\!]$. On a : $P(\lambda_r) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} L_i(\lambda_r)$, où $L_i(\lambda_r) = \ell_{i,k} \displaystyle\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} (\lambda_r - \lambda_j)$

Si $i \neq r$, alors j prend la valeur r puisque $r \in [\![1, k]\!] \setminus \{i\}$, d'où $L_i(\lambda_r) = 0$.

Si $i = r$, alors $L_i(\lambda_i) = \displaystyle\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} (\lambda_i - \lambda_j)^{-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} (\lambda_i - \lambda_j) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} 1 = 1$

Finalement, $P(\lambda_r)$ est une somme dont un terme qui vaut 1 et les autres sont nuls, d'où $P(\lambda_r) = 1$.

(c) Le polynôme $P(x) - 1$ s'annule en k réels deux à deux distincts $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ et est de degré inférieur ou égal à $k - 1$, donc admet plus de racines que son degré.

Donc $P(x) - 1$ est le polynôme nul. Ainsi $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} L_i = 1$.

Le coefficient du terme de degré $k-1$ dans L_i est $\ell_{i,k}$. Or, $P=1$, donc $\deg(P)=0$ et $k-1 \geqslant 1$.

Donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \ell_{i,k} = 0$.

(d) **Initialisation** Dans le cas où $k=2$, on a :

$$\ell_{1,2} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad \text{et} \quad \ell_{2,2} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

D'où

$$\forall x \geqslant 0, \quad (-1)^{k-1}\lambda_1 \cdots \lambda_k \sum_{i=1}^{k} \ell_{i,k} e^{-\lambda_i x} = (-1)\lambda_1\lambda_2 \left(\frac{e^{-\lambda_1 x}}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{e^{-\lambda_2 x}}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) = \lambda_1\lambda_2 \left(\frac{e^{-\lambda_1 x} - e^{-\lambda_2 x}}{\lambda_2 - \lambda_1} \right)$$

On obtient bien la densité de probabilité de D_2 trouvée à la question 3(b).

Hérédité Soit $k \geqslant 2$. Supposons qu'on ait pour $x \geqslant 0$, $f_k(x) = (-1)^{k-1}\lambda_1 \cdots \lambda_k \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \ell_{i,k} e^{-\lambda_i x}$.

Alors

$$\begin{aligned}
\forall x \geqslant 0, f_{k+1}(x) &= \lambda_{k+1} e^{-\lambda_{k+1} x} \int_0^x (-1)^{k-1} \lambda_1 \cdots \lambda_k \left(\sum_{i=1}^{k} \ell_{i,k} e^{-\lambda_i t} \right) e^{\lambda_{k+1} t} \mathrm{d}t \\
&= \lambda_1 \cdots \lambda_{k+1} e^{-\lambda_{k+1} x} (-1)^{k-1} \left(\sum_{i=1}^{k} \ell_{i,k} \int_0^x e^{-(\lambda_i - \lambda_{k+1})t} \mathrm{d}t \right) \\
&= \lambda_1 \cdots \lambda_{k+1} e^{-\lambda_{k+1} x} (-1)^{k-1} \sum_{i=1}^{k} \ell_{i,k} \left[-\frac{1}{\lambda_i - \lambda_{k+1}} e^{-(\lambda_i - \lambda_{k+1})t} \right]_0^x \\
&= \lambda_1 \cdots \lambda_{k+1} e^{-\lambda_{k+1} x} (-1)^{k} \sum_{i=1}^{k} \ell_{i,k+1} \left(e^{-(\lambda_i - \lambda_{k+1})x} - 1 \right) \\
&= (-1)^k \lambda_1 \cdots \lambda_{k+1} \left(\sum_{i=1}^{k} \ell_{i,k+1} e^{-\lambda_i x} - \sum_{i=1}^{k} \ell_{i,k+1} e^{-\lambda_{k+1} x} \right) \\
&= (-1)^k \lambda_1 \cdots \lambda_{k+1} \left(\sum_{i=1}^{k} \ell_{i,k+1} e^{-\lambda_i x} + \ell_{k+1,k+1} e^{-\lambda_{k+1} x} \right) \quad \text{car } \sum_{i=1}^{k} \ell_{i,k+1} + \ell_{k+1,k+1} = 0 \\
&= (-1)^k \lambda_1 \cdots \lambda_{k+1} \left(\sum_{i=1}^{k+1} \ell_{i,k+1} e^{-\lambda_i x} \right)
\end{aligned}$$

Par récurrence on a bien, pour tout entier naturel $k \geqslant 2$, $\forall x \geqslant 0$, $f_k(x) = (-1)^{k-1}\lambda_1 \cdots \lambda_k \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \ell_{i,k} e^{-\lambda_i x}$

Lors d'un calcul technique et difficile, il est attendu des candidats d'être honnête et d'éviter toute entourloupe pour « arranger » les calculs.

5. Soit k un entier naturel non nul.
   (a) Dans le cas où $\forall i \in \mathbf{N}^*$, $\lambda_i = \alpha\, i$, on a pour tout $i \in [\![1, k]\!]$:

$$\begin{aligned}
\ell_{i,k} &= \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} \\
&= \frac{1}{\alpha^{k-1} \prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} (i-j)} \\
&= \frac{1}{\alpha^{k-1}} \cdot \frac{1}{(i-1)\cdots(1)(-1)(-2)\cdots(i-k)} \\
&= \frac{1}{\alpha^{k-1}} \cdot \frac{1}{(i-1)!(-1)^{k-i} 1\cdot 2\cdots(k-i)} \\
&= \frac{1}{\alpha^{k-1}} \frac{(-1)^{k-i}}{(i-1)!(k-i)!} \\
&= \frac{(-1)^{k-i}}{\alpha^{k-1}(k-1)!} \binom{k-1}{i-1}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $\ell_{i,k} = \dfrac{(-1)^{k-i}}{(k-1)!\alpha^{k-1}} \dbinom{k-1}{i-1}$.

   (b) D'après la question 4(d),

$$\begin{aligned}
\forall x \geqslant 0, f_k(x) &= (-1)^{k-1} k! \alpha^k \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{k-i}}{\alpha^{k-1}(k-1)!} \binom{k-1}{i-1} e^{-\alpha i x} \\
&= k\alpha \sum_{i=1}^{k} (-1)^{-i-1} \binom{k-1}{i-1} \left(e^{-\alpha x}\right)^i \\
&= k\alpha e^{-\alpha x} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} (-e^{-\alpha x})^i \\
&= k\alpha e^{-\alpha x} (1 - e^{-\alpha x})^{k-1} \quad \text{par la formule du binôme}
\end{aligned}$$

Donc $\forall x \geqslant 0,\ f_k(x) = k\alpha e^{-\alpha x}(1 - e^{-\alpha x})^{k-1}$

   (c) La fonction F_k est nulle sur $]-\infty, 0[$, et :

$$\forall x \geqslant 0,\ F_k(x) = \int_0^x k\alpha e^{-\alpha t}(1 - e^{-\alpha t})^{k-1} \mathrm{d}t = \Big[(1 - e^{-\alpha t})^k\Big]_0^x = (1 - e^{-\alpha x})^k$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbf{R}, F_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - e^{-\alpha x})^k & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

Partie 2 - Loi et espérance de D

6.

```
import numpy.random as rd
p=input('p=')
i=1 # num ro du test
D=rd.exponential(1/lamb(1))
while rd.random() > p :
    i = i + 1
    D = D + rd.exponential(1/lamb(i))
end
print(D)
```

7. (a) N est le rang d'apparition d'un premier succès (ici, un test qui échoue) dans une succession d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

   Donc N suit une loi géométrique de paramètre p.

   (b) On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([N=k])_{k\in\mathbf{N}^*}$:

$$\forall x \geqslant 0, \mathbf{P}([D \leqslant x]) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}([N=k] \cap [D \leqslant x]) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}([N=k])\mathbf{P}_{[N=k]}([D \leqslant x])$$

   On a donc, pour $x \geqslant 0$, $F_D(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1}\mathbf{P}_{[N=k]}([D \leqslant x])$.

   Or, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, si $[N=k]$ est réalisé, alors les tests réalisés sont $t_1, t_2, \ldots, t_k$, et le temps aléatoire pour les réaliser est $T_1 + \cdots + T_k = D_k$, d'où :

$$\forall x \geqslant 0,\ \forall k \in \mathbf{N}^*,\ \mathbf{P}_{[N=k]}([D \leqslant x]) = \mathbf{P}_{[N=k]}([D_k \leqslant x]) = \mathbf{P}([D_k \leqslant x]) = F_k(x)$$

   en utilisant l'indépendance de D_k et N pour tout $k \in \mathbf{N}^*$

   Ainsi, pour $x \geqslant 0$, $F_D(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1}F_k(x)$

   Le système complet d'événement doit toujours être cité lorsqu'on utilise la formule des probabilités totales

8. (a) Procédons par récurrence sur k.

   Initialisation $\forall t \geqslant 0,\ f_1(t) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}$.

   Donc $\forall t \geqslant 0,\ f_1(t) \leqslant \lambda_1$.

   Hérédité Soit k un entier naturel non nul. Supposons que $\forall t \geqslant 0,\ f_k(t) \leqslant \lambda_1$.

   Or d'après la question 3, $\forall x \geqslant 0,\ f_{k+1}(x) = \lambda_{k+1}e^{-\lambda_{k+1}x}\displaystyle\int_0^x f_k(t)e^{\lambda_{k+1}t}\mathrm{d}t$.

   Par hypothèse de récurrence, $\forall x \geqslant 0,\ \displaystyle\int_0^x f_k(t)e^{\lambda_{k+1}t}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \lambda_1 e^{\lambda_{k+1}t}\mathrm{d}t$ par positivité de l'intégrale.

   Or $\displaystyle\int_0^x \lambda_1 e^{\lambda_{k+1}t}\mathrm{d}t = \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_{k+1}}e^{\lambda_{k+1}t}\right]_0^x = \frac{\lambda_1}{\lambda_{k+1}}\left(e^{\lambda_{k+1}x} - 1\right)$.

   Donc $\forall x \geqslant 0,\ f_{k+1}(x) \leqslant \lambda_{k+1}e^{-\lambda_{k+1}x}\dfrac{\lambda_1}{\lambda_{k+1}}\left(e^{\lambda_{k+1}x} - 1\right) \leqslant \lambda_1(1 - e^{-\lambda_{k+1}x}) \leqslant \lambda_1$.

   Ainsi par le principe de récurrence, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ et $t \in \mathbf{R}_+$: $f_k(t) \leqslant \lambda_1$.

   (b) Soit t un réel.

   Si $t < 0$, $f_k(t) = 0$, donc la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} pq^{k-1}f_k(t)$ converge.

   Si $t \geqslant 0$, alors $\forall k \in \mathbf{N}^*, 0 \leqslant pq^{k-1}f_k(t) \leqslant pq^{k-1}\lambda_1$. Or, la série géométrique $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} pq^{k-1}\lambda_1$ converge, donc par comparaison de suites positives, la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} pq^{k-1}f_k(t)$ converge.

   La fonction $f : t \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1}f_k(t)$ est donc bien définie sur $\mathbf{R}$.

   Les candidats doivent préciser que les suites sont de signe positif pour appliquer le critère de majoration.

   (c) Soit $x \geqslant 0$. On a :

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n} pq^{k-1}\int_0^x f_k(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1}f_k(t) - \sum_{k=1}^{n} pq^{k-1}f_k(t)\right)\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^x \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} pq^{k-1}f_k(t)\right)\mathrm{d}t$$

Comme pour tout $t \in [0,x]$, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} pq^{k-1} f_k(t) \geqslant 0$, par positivité de l'intégrale, on a bien que :

$$0 \leqslant \int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n} pq^{k-1} \int_0^x f_k(t)\mathrm{d}t.$$

De plus, pour tout $k \geqslant n+1$ et tout $t \in [0,x]$, $pq^{k-1} f_k(t) \leqslant pq^{k-1}\lambda_1$, d'où

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} pq^{k-1} f_k(t) \leqslant \lambda_1 \sum_{k=n+1}^{+\infty} pq^{k-1} = \lambda_1 p \frac{q^n}{1-q} = \lambda_1 q^n$$

Par positivité de l'intégrale, on a donc

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n} pq^{k-1} \int_0^x f_k(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \lambda_1 q^n \mathrm{d}t = \lambda_1 q^n x$$

On a donc bien, pour $x \geqslant 0$ et $n \in \mathbf{N}^*$, $0 \leqslant \displaystyle\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n} pq^{k-1} \int_0^x f_k(t)\ \mathrm{d}t \leqslant q^n \lambda_1 x$.

(d) Soit x un réel positif.
Comme $q \in]0,1[$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} q^n \lambda_1 x = 0$. Donc par encadrement dans l'inégalité obtenue à la question précédente et en remarquant que $\forall k \in \mathbf{N}^*$, $\displaystyle\int_0^x f_k(t)\mathrm{d}t = F_k(x)$, on obtient que : $\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1} F_k(x)$.
D'après la question 7(b), $\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = F_D(x)$.

Ainsi $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ coïncide avec F_D sur $\mathbf{R}_+$.

(e) La fonction f est définie sur $\mathbf{R}$, continue sur $\mathbf{R}^*$, positive, et vérifie : $\forall x \in \mathbf{R},\ F_D(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t$.

Ainsi, f est une densité de D .

9. Soit λ un réel strictement positif.
On suppose **dans cette question uniquement** que $\forall i \in \mathbf{N}^*$, $\lambda_i = \lambda$
Soit x un réel positif.
D'après la question 2, $\forall k \in \mathbf{N}^*$, $f_k(x) = \dfrac{\lambda^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-\lambda x}$.
D'après la question 8, f est une densité de D où $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1} f_k(x)$.
Alors pour $x < 0$, $f(x) = 0$.
Et pour $x \geqslant 0$, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-\lambda x} = p\lambda e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda q x)^k}{k!} = p\lambda e^{-\lambda x} e^{\lambda q x} = \lambda p e^{-\lambda p x}$.

Ainsi D suit une loi exponentielle de paramètre $p\lambda$.

10. On suppose que $\forall i \in \mathbf{N}^*$, $\lambda_i = \alpha i$.

(a) On utilise l'expression de F_k obtenue dans la question 5(c) :

$$\forall x \geqslant 0,\ F_D(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1}(1-e^{-\alpha x})^k = p(1-e^{-\alpha x}) \sum_{k=1}^{+\infty} \left(q(1-e^{-\alpha x})\right)^{k-1} = p(1-e^{-\alpha x}) \frac{1}{1-q(1-e^{-\alpha x})}$$

On a donc bien $\forall x \in \mathbf{R}$, $\quad F_D(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{p}{p+qe^{-\alpha x}}\left(1-e^{-\alpha x}\right) & \text{sinon.} \end{cases}$

(b) Pour tout $x \geqslant 0$,

$$1 - F_D(x) = \frac{p + qe^{-\alpha x} - p + pe^{-\alpha x}}{p + qe^{-\alpha x}} = \frac{e^{-\alpha x}}{p + qe^{-\alpha x}}$$

La fonction $x \mapsto (1 - F_D(x))$ est continue sur $[0, +\infty[$. De plus, pour $A > 0$, on a :

$$\int_0^A (1 - F_D(x))\mathrm{d}x = \left[\frac{-1}{\alpha q}\ln(p + qe^{-\alpha x})\right]_0^A = \frac{-\ln(p + qe^{-\alpha A})}{\alpha q} + \frac{\ln(p+q)}{\alpha q} = \frac{-\ln(p + qe^{-\alpha A})}{\alpha q}$$

Ainsi, $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \int_0^A (1 - F_D(x))\mathrm{d}x = -\frac{1}{\alpha q}\ln(p)$.

Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F_D(x))\,\mathrm{d}x$ converge et on a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F_D(x))\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\alpha q}\ln(p)$.

(c) Soit A un réel strictement positif. On calcule $\displaystyle\int_0^A (1 - F_D(t))\mathrm{d}t$ à l'aide d'une intégration par parties, en posant $u(t) = 1 - F_D(t)$, $u'(t) = -f(t)$, $v'(t) = 1$, $v(t) = t$, les fonctions u et v étant $\mathscr{C}^1$ sur $[0, A]$:

$$\int_0^A (1 - F_D(t))\mathrm{d}t = \Big[t(1 - F_D(t))\Big]_0^A - \int_0^A t(-f(t))\mathrm{d}t = A(1 - F_D(A)) + \int_0^A tf(t)\mathrm{d}t$$

On obtient donc bien que : $\displaystyle\int_0^A tf(t)\mathrm{d}t = -A(1 - F_D(A)) + \int_0^A (1 - F_D(t))\mathrm{d}t$.

(d) On voit que $A(1 - F_D(A)) = \dfrac{Ae^{-\alpha A}}{p + qe^{-\alpha A}} \underset{A \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{p}Ae^{-\alpha A}$.

Donc par croissance comparée, $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} A(1 - F_D(A)) = 0$.

Ainsi, $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \int_0^A tf(t)\mathrm{d}t = 0 - \frac{1}{\alpha q}\ln(p)$.

On déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$ converge (absolument), et vaut $-\dfrac{1}{\alpha q}\ln(p)$.

Ainsi, D admet une espérance, et $E(D) = -\dfrac{1}{\alpha q}\ln(p)$.