

Devoir surveillé n°6 - type ECRICOME - Correction

Dans tout le devoir, on suppose que les bibliothèques Python sont déjà importées avec leurs alias habituels :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt
```

Exercice 1 (d'après Ecricome 2017, ex 2)

Partie A

- La limite en 0 n'est pas indéterminée et est obtenue sans problème par opérations sur les limites : $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = -\infty$
 - En $+\infty$, $\varphi(x) = \underbrace{x^{2a}}_{\text{car } x > 2a} \left(-a + \frac{\ln(x)}{x^{2a}}\right)$ Or, par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^{2a}} = 0$ (car $2a > 0$) donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = -\infty$

Autre rédaction possible : $\ln(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^{2a})$ car $2a > 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -ax^{2a} = -\infty$ (toujours car $2a > 0$)
 - φ est C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ par opérations sur les limites (en rappelant que $x^{2a} = e^{2a \ln x}$, la condition $x > 0$ suffit pour justifier notre propos) (cette remarque n'est pas anodine, $x \mapsto x^{2a}$ n'est pas un polynôme puisque a n'est pas nécessairement entier !)
- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*} : \varphi'(x) = \frac{1}{x} - 2a^2 x^{2a-1} = \frac{1-2a^2 x^{2a}}{x}$

$$\begin{aligned} \varphi'(x) > 0 &\iff 1 - 2a^2 x^{2a} > 0 \\ &\iff x^{2a} < \frac{1}{2a^2} \\ &\iff x < \left(\frac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}} \end{aligned}$$

On peut donc dresser le tableau de variations (en notant $x_0 = \left(\frac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}}$)

x	0	x_0	$+\infty$
$\varphi'(x)$		+	-
φ		M	

$-\infty \nearrow \quad \searrow -\infty$

$M = \varphi(x_0) = \ln(x_0) - ax_0^{2a}$. Or $\ln(x_0) = \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{1}{2a^2}\right)$ et $x_0^{2a} = \frac{1}{2a^2}$ donc :

$$M = \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{1}{2a^2}\right) - \frac{1}{2a} = \frac{1}{2a} \left(\ln\left(\frac{1}{2a^2}\right) - 1\right)$$

$$\begin{aligned} M > 0 &\iff \ln\left(\frac{1}{2a^2}\right) - 1 > 0 \\ &\iff \ln\left(\frac{1}{2a^2}\right) > 1 \\ &\iff \frac{1}{2a^2} > e \\ &\iff 2a^2 < \frac{1}{e} \\ &\iff a < \sqrt{\frac{1}{2e}} \quad \text{car } a > 0 \end{aligned}$$

Donc :

- si $a < \sqrt{\frac{1}{2e}}$, $M > 0$

x	0	z_1	x_0	z_2	$+\infty$
$\varphi'(x)$		+	0	-	
φ					

On peut donc appliquer le théorème de la bijection sur $]-\infty, x_0]$, puis sur $[0, +\infty[$, f y étant continue et dans un cas strictement croissante et dans le second cas strictement décroissante.

f réalise une bijection de $]-\infty, x_0]$ sur $]-\infty, M]$ et également une bijection de $[0, +\infty[$ sur $]-\infty, M]$.

Puisque $0 \in]-\infty, M]$, on en déduit que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution sur $]-\infty, x_0]$ et une unique solution sur $[0, +\infty[$.

L'équation $\varphi(x) = 0$ admet donc deux solutions z_1 et z_2 vérifiant $z_1 < x_0 < z_2$

- si $a = \sqrt{\frac{1}{2e}}$, $M = 0$ et 0 est donc le maximum de cette fonction, atteint uniquement en x_0 . L'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ qui est x_0 .
- si $a > \sqrt{\frac{1}{2e}}$, $M < 0$. L'équation $\varphi(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ puisque son maximum est négatif strictement.

Partie B

- $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont C^2 sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ (polynomiales)
 - $t \mapsto \ln(t)$ est C^2 sur $\mathbb{R}^{+*}$ (c'est une fonction de référence)
 - ↳ donc par composition, $(x, y) \mapsto \ln(x)$ et $(x, y) \mapsto \ln(y)$ sont C^2 sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$
 - par produit, $(x, y) \mapsto \ln(x)\ln(y)$ est C^2 sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$
 - $(x, y) \mapsto xy$ est C^2 sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ (polynomiale)
 - $t \mapsto t^a = e^{a \ln t}$ est C^2 sur $\mathbb{R}^{+*}$ par opérations sur les fonctions usuelles
 - ↳ donc par composition, $(x, y) \mapsto (xy)^a$ est C^2 sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$
 - par soustraction, f est C^2 sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$.
4. $\forall (x, y) \in U$, $\partial_1 f(x, y) = \frac{1}{x} \ln(y) - ay(xy)^{a-1}$ et $\partial_2 f(x, y) = \frac{1}{y} \ln(x) - ax(xy)^{a-1}$
5. $\forall (x, y) \in U$:

$$\begin{aligned}
 (x, y) \text{ est un point critique de } f &\iff \partial_1 f(x, y) = 0 \text{ et } \partial_2 f(x, y) = 0 \\
 &\iff \begin{cases} \frac{1}{x} \ln(y) - ay(xy)^{a-1} = 0 \\ \frac{1}{y} \ln(x) - ax(xy)^{a-1} = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} \ln(y) = a(xy)^a \\ \ln(x) = a(xy)^a \end{cases} \\
 &\stackrel{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} \begin{cases} \ln(y) - \ln(x) = 0 \\ \ln(x) = a(xy)^a \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = y \\ \ln(x) = a(x^2)^a \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = y \\ \ln(x) = ax^{2a} \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = y \\ \varphi(x) = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

C'est le résultat attendu.

6. On discute en s'aidant des résultats de la question 2 :

- Si $a < \sqrt{\frac{1}{2e}}$, $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions z_1 et z_2 sur $\mathbb{R}$, donc f admet deux points critiques (z_1, z_1) et (z_2, z_2) .
- Si $a = \sqrt{\frac{1}{2e}}$, $\varphi(x) = 0$ admet une seule solution x_0 sur $\mathbb{R}$, donc f admet un point critique (x_0, x_0) .
- Si $a > \sqrt{\frac{1}{2e}}$, $\varphi(x) = 0$ n'admet pas de solutions sur $\mathbb{R}$ donc f n'admet pas de point critique.

Partie C

On se place dans le cas : $a < \sqrt{\frac{1}{2e}}$.

7. $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$,

$$\partial_{1,1}^2 f(x, y) = -\frac{1}{x^2} \ln(y) - ay(a-1)y(xy)^{a-2} = -\frac{1}{x^2} \ln(y) - a(a-1)y^2(xy)^{a-2}$$

$$\partial_{2,2}^2 f(x, y) = -\frac{1}{y^2} \ln(x) - ax(a-1)x(xy)^{a-2} = -\frac{1}{y^2} \ln(x) - a(a-1)x^2(xy)^{a-2}$$

$$\partial_{1,2}^2 f(x, y) = \partial_{1,2}^2 (f)(x, y) \text{ par le théorème de Schwarz car } f \text{ est } C^2 \text{ sur } (\mathbb{R}^{+*})^2$$

$$\partial_{1,2}^2 f(x, y) = \frac{1}{xy} - a(xy)^{a-1} - a(a-1)xy(xy)^{a-2} = \frac{1}{xy} - a(xy)^{a-1} - a(a-1)(xy)^{a-1} = \frac{1}{xy} - a^2(xy)^{a-1}$$

8. Si $x = y$:

$$\partial_{1,1}^2 f(x, x) = -\frac{1}{x^2} \ln(x) - a(a-1)x^{2a-2}$$

Si maintenant $x = z_1$, puisque z_1 est racine de φ , $\ln(z_1) - az_1^{2a} = 0$, c'est-à-dire $\ln(z_1) = az_1^{2a}$, d'où :

$$\partial_{1,1}^2 f(z_1, z_1) = -\frac{1}{z_1^2} \times az_1^{2a} - a(a-1)z_1^{2a-2} = -az_1^{2a-2} - a(a-1)z_1^{2a-2} = -a^2 z_1^{2a-2}$$

Ayant prouvé notre savoir faire, nous revendiquons le droit de ne pas calculer les deux autres coefficients et de profiter des réponses de l'énoncé.

$$\nabla^2(f)(z_1, z_1) = \begin{pmatrix} \partial_{1,1}^2(f)(z_1, z_1) & \partial_{1,2}^2(f)(z_1, z_1) \\ \partial_{2,2}^2(f)(z_1, z_1) & \partial_{2,1}^2(f)(z_1, z_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a^2 z_1^{2a-2} & \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} \\ \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} & -a^2 z_1^{2a-2} \end{pmatrix}$$

$$9. M X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2} \\ \frac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2} \right) X_1 \quad \text{avec } X_1 \neq 0$$

Donc $\lambda_1 = \frac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2}$ est valeur propre de M associé au vecteur propre X_1 .

$$M X_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{z_1^2} \\ -\frac{1}{z_1^2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{z_1^2} X_2 \quad \text{avec } X_2 \neq 0$$

Donc $\lambda_2 = -\frac{1}{z_1^2}$ est valeur propre de M associé au vecteur propre X_2 .

Comme X_1 et X_2 forment une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ (ils sont non colinéaires et au nombre de deux dans un espace de dimension 2), nous avons bien les deux valeurs propres de M , il ne peut y en avoir d'autre.

Les valeurs propres de M sont $\lambda_1 = \frac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2}$ et $\lambda_2 = -\frac{1}{z_1^2}$

10. Regardons les signes de λ_1 et λ_2 . On a immédiatement : $\lambda_2 < 0$ et :

$$\lambda_1 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{z_1^2} > 2a^2 z_1^{2a-2} \Leftrightarrow \frac{1}{2a^2} > z_1^{2a}$$

$$\text{Or } z_1 \text{ est tel que } z_1 < x_0 \text{ donc } z_1^{2a} < x_0^{2a} = \left[\left(\frac{1}{2a^2} \right)^{1/2a} \right]^{2a} = \frac{1}{2a^2}$$

$$\text{Donc } z_1^{2a} < \frac{1}{2a^2} \text{ et ainsi } \lambda_1 > 0$$

On a $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$, donc **il n'y a pas d'extremum local en** (z_1, z_1) , puisque nous sommes en présence d'un point col.

11. Pour regarder ce qui se passe en (z_2, z_2) , on reprend les calculs en substituant z_1 par z_2 . On obtient les valeurs propres :

$$\lambda_1 = \frac{1}{z_2^2} - 2a^2 z_2^{2a-2} \text{ et } \lambda_2 = -\frac{1}{z_2^2}$$

On a $\lambda_2 < 0$, mais comme $z_2 > x_0$ on a $\lambda_2 < 0$.

La matrice hessienne au point critique (z_2, z_2) ayant deux valeurs propres strictement négatives sur l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^2$, on en déduit qu' **il y a un maximum local en** (z_2, z_2) .

Exercice 2 (d'après Ecricome 2017, ex 3)

Partie A

- Les tirages ayant lieu avec remise, et chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il est clair que X_k suit la (même) loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. On en connaît l'espérance $E(X_k) = \frac{n+1}{2}$.
- Chaque tirage rapportant un nombre entre 1 et n , la somme de tels nombres peut être supérieure à n dès le premier tirage en tirant tout d'abord la boule n , et dans le pire des cas atteint n après l'obtention de n fois la boule numéro 1. On a alors $T_n(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$.
 - $T_n = 1$ signifie qu'on obtient la boule numérotée n dès le premier tirage, ce qui se produit avec probabilité $\frac{1}{n}$. Ainsi, $P(T_n = 1) = \frac{1}{n}$.
 - $P(T_n = n)$ signifie qu'on a obtenu des 1 au cours des $n-1$ premiers tirages, le n -ième tirage permettant nécessairement de dépasser un total de n (car après les $n-1$ premiers tirages, on a obtenu un score de $n-1$ et que l'on dépassera donc n avec n'importe quelle boule tirée au dernier tirage).

Donc
$$(T_n = n) = (X_1 = 1) \cap \dots \cap (X_{n-1} = 1) = \bigcap_{k=1}^{n-1} (X_k = 1).$$

Chaque tirage étant indépendant des précédents, la probabilité de l'intersection est égale aux produits des probabilités comme écrit ci-dessous :

$$P(T_n = n) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} (X_k = 1)\right) = \prod_{k=1}^{n-1} P(X_k = 1) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$

- On suppose dans cette question que $n = 2$.

D'après ce qu'on a vu précédemment, on a $T_2(\Omega) = \{1, 2\}$, $P(T_2 = 1) = \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$ et $P(T_2 = 2) = P(T = n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1} = \frac{1}{2}$.
On reconnaît la loi uniforme sur $\llbracket 1, 2 \rrbracket$: $T_2 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 2 \rrbracket)$

- On prend maintenant $n = 3$. On a alors $T_3(\Omega) = \{1, 2, 3\}$. Toujours d'après les questions précédentes,

$$P(T_3 = 1) = \frac{1}{3}, \quad \text{et} \quad P(T_3 = 3) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}.$$

Comme $(T_3 = 2)$ est le contraire de l'événement $(T_3 = 1) \cup (T_3 = 3)$, qui sont en réunion incompatible, on en déduit que

$$P(T_3 = 2) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}.$$

Il suit que

$$E(T_3) = \frac{1}{3} + 2 \times \frac{5}{9} + 3 \times \frac{1}{9} = \frac{16}{9},$$

ce qui est bien le résultat attendu.

Partie B

- La somme de k nombres compris entre 1 et n donne un nombre entre k et nk . Ainsi, $S_k(\Omega) = \llbracket k, nk \rrbracket$.
(en réalité, $S_k(\Omega) \subset \llbracket k, nk \rrbracket$ est évident, l'égalité est un peu difficile à prouver mais on considère que ce n'était pas attendu le jour J)
- Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ fixé.
 - Il est clair que $S_{k+1} = X_1 + \dots + X_k + X_{k+1} = S_k + X_{k+1}$.
 - Comme S_k est une variable aléatoire, la famille d'événements $\{(S_k = j)\}_{j \in \llbracket k, nk \rrbracket}$ forme un système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales, pour tout $i \in \llbracket k+1, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} P(S_{k+1} = i) &= P(S_k + X_{k+1} = i) \\ &= \sum_{j=k}^{nk} P((S_k + X_{k+1} = i) \cap (S_k = j)) \\ &= \sum_{j=k}^{nk} P((X_{k+1} = i - j) \cap (S_k = j)) \\ &= \sum_{j=k}^{nk} P(X_{k+1} = i - j) P(S_k = j) && \text{par le lemme des coalitions car les tirages sont indépendants} \\ &= \sum_{j=k}^{i-1} P(X_{k+1} = i - j) P(S_k = j) && \text{car } P(X_{k+1} = i - j) = 0 \text{ si } i - j \leq 0 \\ &= \sum_{j=k}^{i-1} \frac{1}{n} P(S_k = j) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} P(S_k = j) && \text{car } X_{k+1} \text{ suit la loi uniforme sur } \llbracket 1, n \rrbracket \end{aligned}$$

7. a. La formule du triangle de Pascal donne

$$\binom{j-1}{k-1} + \binom{j-1}{k} = \binom{j}{k}$$

- b. Il y a deux rédactions possibles pour cette question :

- Par récurrence sur i :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall i \geq k+1, \text{ Posons } HR_i : \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}$$

Initialisation Pour $i = k+1$

$$\sum_{j=k}^k \binom{j-1}{k-1} = \binom{k-1}{k-1} = 1 = \binom{k}{k}$$

donc HR_{k+1} est vraie.

Hérédité Soit $i \geq k+1$, supposons alors que HR_i est vraie. Montrons que HR_{i+1} est vraie.

$$\begin{aligned} \sum_{j=k}^i \binom{j-1}{k-1} &= \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} + \binom{i-1}{k-1} \\ &= \binom{i-1}{k} + \binom{i-1}{k-1} \quad (\text{Par } HR_i) \\ &= \binom{i}{k} \quad (\text{par le triangle de Pascal}) \end{aligned}$$

donc HR_{i+1} est vraie.

Conclusion Donc $\forall i \geq k+1, \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}$

- Par calcul direct :

Ayant prouvé que $\binom{j-1}{k-1} + \binom{j-1}{k} = \binom{j}{k}$ pour tous j et k naturels non nuls, on en déduit que $\binom{j-1}{k-1} = \binom{j}{k} - \binom{j-1}{k}$ et par suite que $\forall k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} &= \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j}{k} - \binom{j-1}{k} \\ &= \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j}{k} - \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k} \\ &= \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j}{k} - \sum_{j'=k-1}^{i-2} \binom{j'}{k} \quad \text{chgt d'indice } j' = j-1 \\ &= \binom{i-1}{k} - \binom{k-1}{k} \quad \text{par télescopage} \\ &= \binom{i-1}{k} \quad \text{car } k-1 < k \end{aligned}$$

- c. **Initialisation** Pour $k=1$, la proposition $\mathcal{H}_k$ découle de la loi de S_1 qui est la loi de X_1 et donc la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. Plus précisément,

$$P(S_1 = i) = \frac{1}{n} = \frac{1}{n!} \binom{k-1}{0}.$$

Hérédité Soit $k \geq 1$, supposons donc $\mathcal{H}_k$ vraie. $\forall i \in \llbracket k+1, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} P(S_{k+1} = i) &= \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} P(S_k = j) \quad \text{d'après la question 6b} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} \frac{1}{n^k} \binom{j-1}{k-1} \quad \text{par } \mathcal{H}_k \text{ car } j \in \llbracket k, i-1 \rrbracket \text{ avec } i \leq n \\ &= \frac{1}{n^{k+1}} \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} \\ &= \frac{1}{n^{k+1}} \binom{i-1}{k} \quad \text{par la question 7b,} \end{aligned}$$

donc $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.

Conclusion Donc $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall i \in \llbracket k, n \rrbracket, P(S_k = i) = \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1}$

8. a. L'événement $[T_n > k]$ signifie qu'on a besoin d'au moins $k+1$ tirages pour dépasser la valeur n ou, de manière équivalente, qu'après k tirages, le total des nombres obtenus est inférieur ou égal à $n-1$, ce qui est exactement l'événement $[S_k \leq n-1]$. Ainsi,

$$[S_k \leq n-1] = [T_n > k].$$

- b. Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Il découle de la question précédente que

$$\begin{aligned} P(T_n > k) &= P(S_k \leq n-1) = \sum_{i=k}^{n-1} P(S_k = i) \\ &= \sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1} \\ &= \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k} \quad (\text{par la question 7b}) \end{aligned}$$

d'où la formule attendue.

9. La première formule est une formule classique, à savoir démontrer. Elle repose sur un premier résultat que nous allons démontrer :

$$P(T_n = k) = P(T_n > k-1) - P(T_n > k)$$

et sur un décalage d'indice. C'est un peu une "intégration par parties discrètes".

Tout d'abord, puisque T_n est à valeurs entières :

$$(T_n > k-1) = (T_n \geq k) = (T_n = k) \cup (T_n > k)$$

Cette union étant disjointe, il vient :

$$P(T_n > k-1) = P(T_n = k) + P(T_n > k)$$

d'où le résultat annoncé plus haut. Ensuite :

$$\begin{aligned} E(T_n) &= \sum_{k=1}^n k P(T_n = k) \\ &= \sum_{k=1}^n k (P(T_n > k-1) - P(T_n > k)) \\ &= \sum_{k=1}^n k P(T_n > k-1) - \sum_{k=1}^n k P(T_n > k) \\ &\stackrel{k'=k-1}{=} \sum_{k'=0}^{n-1} (k'+1) P(T_n > k') - \sum_{k=1}^n k P(T_n > k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} P(T_n > k) + \sum_{k=0}^{n-1} k P(T_n > k) - \sum_{k=1}^n k P(T_n > k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} P(T_n > k) - n \underbrace{P(T_n > n)}_{=0} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} P(T_n > k) \quad \text{car } T(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket \end{aligned}$$

ce qu'on voulait (car $P(T_n > n) = 0$). On injecte alors le résultat de la question précédente :

$$E(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} P(T_n > k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} \quad \text{par la formule du binôme}$$

10. Une fois de plus, cette limite est une question classique, déjà vue en classe : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} = e^{(n-1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$
Or $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ car $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$ d'après les équivalents de référence.

Par produit, $(n-1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n-1}{n} \sim 1$ d'où $(n-1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1$

Et puisque la fonction exponentielle est continue en 1, on en déduit que $e^{(n-1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} e^1$

En d'autres termes, $E(T_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} e$.

Partie C

12. a. On reconnaît après manipulations une série télescopique. Plus précisément,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n P(Y = k) &= \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{k!} \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{k!} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \\
 &= 1 - \frac{1}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1
 \end{aligned}$$

d'où convergence de la série de terme général $P(Y = k)$ dont la somme vaut bien 1.

- b. Y admet une espérance si la série $\sum kP(Y = k)$ est absolument convergente. Il s'agit encore de manipulations sur la série exponentielle :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n kP(Y = k) &= \sum_{k=1}^n \frac{k(k-1)}{k!} = \sum_{k=2}^n \frac{k(k-1)}{k!} \quad \text{car le terme pour } k=0 \text{ est nul} \\
 &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-2)!} \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e
 \end{aligned}$$

donc la série converge et donc converge absolument (à termes positifs) et Y admet bien une espérance, avec $E(Y) = e$.

13. D'après la question 8b,

$$\begin{aligned}
 P(T_n > k) &= \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k} \\
 &= \frac{(n-1)!}{n^k k! (n-1-k)!} \\
 &= \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^k \frac{n-j}{n} \\
 &= \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^k \left(1 - \frac{j}{n}\right).
 \end{aligned}$$

Il suffit alors de montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{j=1}^k \left(1 - \frac{j}{n}\right) = 1,$$

ce qui est clair car $\frac{j}{n} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ et que le produit comporte un nombre de termes fixé. D'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(T_n > k) = \frac{1}{k!}.$$

14. (T_n) converge en loi vers Y s'il y a convergence des fonctions de répartition. Plus précisément, si

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(T_n \leq k) = P(Y \leq k).$$

Ceci est clairement équivalent au fait que

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(T_n > k) = P(Y > k).$$

On connaît la valeur de la limite ci-dessus par la question précédente. Reste donc à vérifier que

$$P(Y > k) = \frac{1}{k!}.$$

Par définition de Y ,

$$\begin{aligned}
 P(Y > k) &= 1 - P(Y \leq k) = 1 - \sum_{j=1}^k P(Y = j) \\
 &= 1 - \sum_{j=1}^k \frac{(j-1)!}{j!} \\
 &= 1 - \left(1 - \frac{1}{k!}\right) \\
 &= \frac{1}{k!},
 \end{aligned}$$

d'après le calcul effectué au **12a**

ce qu'on voulait et qui montre bien la convergence de loi de (T_n) vers Y .

15. Voici une version commentée du programme à compléter :

```
def simulT(n):
    S = 0
    k = 0                                # aucun tirage fait pour l'instant
    while S < n :
        tirage = rd.randint(1,n+1)
        S = S + tirage
        k = k+1                          # un tirage de plus
    return k
```

- 16.** a. Le vecteur généré par `loitheoY()` est un vecteur de longueur n correspondant à la loi de Y , ses composantes $[y(1), \dots, y(k)]$ sont les probabilités théoriques $y(k) = P(Y = k)$. Le vecteur généré par `freqT()` contient quant à lui les fréquences observées des valeurs prises par T_n sur 100000 réalisations de la variable. Plus précisément, $y(k)$ correspond à la fréquence du nombre de fois où la fonction `freqT()` a renvoyé k au cours des 100000 réalisations.
- b. On constate que pour n de plus en plus grand, la *répartition* des valeurs empiriques de T_n se rapproche de plus en plus des valeurs théoriques (pour k allant de 1 à 5), illustrant donc la convergence en loi de (T_n) vers Y .

Exercice 3 (D'après Ecricome 2013 + sujet zéro n°2 d'Ecricome 2023)

Partie A, d'après Ecricome 2013

1. R est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme et $\forall x \in \mathbb{R}, R'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$ donc R' admet deux racines réelles : 1 et 3.

On a donc $r_1 = 1$ et $r_2 = 3$.

2. $R'(x)$ étant du signe de son coefficient dominant sauf entre ses racines, on a donc :

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$		
$R'(x)$		+	0	-	0	+
$R(x)$			1			$+\infty$
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
				-3		

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} R(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$f(1) = 1$$

$$f(3) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} R(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

3. • R est continue et strictement croissante sur $]-\infty, 1[$, donc elle réalise une bijection de $]-\infty, 1[$ sur $]-\infty, 1[$.
Or, $0 \in]-\infty, 1[$, donc l'équation $R(x) = 0$ admet une unique solution sur $]-\infty, 1[$, notée a .
De plus, comme $f(0) = -3 < R(a)$ et comme R est strictement croissante sur $]-\infty, 1[$, on a $a > 0$.
• De même, R est continue et strictement décroissante sur $]1, 3[$, donc elle réalise une bijection de $]1, 3[$ sur $]-3, 1[$.
Or, $0 \in]-3, 1[$, donc l'équation $R(x) = 0$ admet une unique solution sur $]1, 3[$, notée b .
• R est continue et strictement croissante sur $]3, +\infty[$, donc elle réalise une bijection de $]3, +\infty[$ sur $]-3, +\infty[$.
Or, $0 \in]-3, +\infty[$, donc l'équation $R(x) = 0$ admet une unique solution sur $]3, +\infty[$, notée c .
• Enfin, comme $R(1) = 1 \neq 0$ et $R(3) = -3 \neq 0$, 1 et 3 ne sont pas racines.
• R admet donc bien 3 racines a, b, c avec $0 < a < 1 < b < 3 < c$.

4. $AX_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ 3 - 9\lambda + 6\lambda^2 \end{pmatrix}$

Puisque X_λ n'est pas le vecteur nul, c'est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ si et seulement si

$$AX_\lambda = \lambda X_\lambda \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \lambda \\ \lambda^2 = \lambda^2 \\ 3 - 9\lambda + 6\lambda^2 = \lambda^3 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow R(\lambda) = 0.$$

5. La question précédente nous prouve que : dire λ est une valeur propre de A signifie exactement que λ est racine de R . Or les racines de R ont été étudiées en question 3.

Par suite, X_a, X_b et X_c sont trois vecteurs propres associés aux trois valeurs propres distinctes a, b et c .

Par suite, A admet 3 valeurs propres distinctes, et est d'ordre 3, donc A est diagonalisable et, en posant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix},$$

on a, d'après les propriétés des matrices de changement de base, $A = PDP^{-1}$.

Partie B, d'après Ecricome 2013

6. • Pour tout $(M, N) \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f(\lambda M + N) = A(\lambda M + N) + (\lambda M + N)A = \lambda AM + AN + \lambda MA + NA = \lambda(AM + MA) + AN + NA = \lambda f(M) + f(N),$$

donc f est bien une application linéaire.

- De plus, pour tout $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, en posant $M' = P^{-1}MP$ qui équivaut à $M = PM'P^{-1}$, on a

$$\begin{aligned} f(M) = 0 &\Leftrightarrow AM + MA = 0 \\ &\Leftrightarrow PDP^{-1}PM'P^{-1} + PM'P^{-1}PDP^{-1} = 0 \\ &\Leftrightarrow PDM'P^{-1} + PM'DP^{-1} = 0 \\ &\Leftrightarrow DM' + M'D = 0 \quad (\text{en multipliant à gauche par } P^{-1} \text{ et à droite par } P). \end{aligned}$$

7. Posons $N = \begin{pmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ v & w & x \end{pmatrix}$. Alors $DN + ND = \begin{pmatrix} 2ap & (a+b)q & (a+c)r \\ (b+a)s & 2bt & (b+c)u \\ (c+a)v & (c+b)w & 2cx \end{pmatrix}$.

Par suite, $DN + ND = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2ap = 0 & (a+b)q = 0 & (a+c)r = 0 \\ (b+a)s = 0 & 2bt = 0 & (b+c)u = 0 \\ (c+a)v = 0 & (c+b)w = 0 & 2cx = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \text{car } a, b \text{ et } c \\ \text{strictement positifs} \end{matrix} p = q = r = s = t = u = v = w = x = 0$

Par suite, $\boxed{DN + ND = 0 \Leftrightarrow N = 0.}$

8. En posant $M' = P^{-1}MP$, on a :

$$M \in \ker f \Leftrightarrow f(M) = 0 \Leftrightarrow DM' + M'D = 0 \underset{\text{q.7 avec } N=M'}{\Leftrightarrow} M' = 0 \Leftrightarrow M = P0P^{-1} = 0$$

D'où $\ker f = \{0\}$, donc f est injectif et, par suite, bijectif (car c'est un endomorphisme donc l'espace de départ et d'arrivée ont même dimension).

f est donc bien un isomorphisme.

Partie C, inspiré d'Ecricome, sujet Zéro de 2023 n°2, ex 2

9. $Y' = AY \Leftrightarrow \begin{cases} y' = y' \\ y'' = y'' \\ y''' = 3y - 9y' + 6y'' \end{cases} \Leftrightarrow y''' = 3y - 9y' + 6y'' \Leftrightarrow y''' - 6y'' + 9y' - 3y = 0 \Leftrightarrow y \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}.$

10. a. Puisque $Z = P^{-1}Y$, alors les composantes de Z sont combinaisons linéaires des composantes de Y , c'est à dire combinaisons linéaires des fonctions y , y' et y'' , qui sont toutes trois dérivables puisque y est trois fois dérivable. Il suit que Z est dérivable et, par linéarité de la dérivation, $Z' = P^{-1}Y'$.

b. On en déduit les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de l'équation différentielle } (E) &\Leftrightarrow Y' = AY && \text{d'après la question 9} \\ &\Leftrightarrow P^{-1}Y' = P^{-1}AY && \text{par multiplication à gauche par } P^{-1} \\ &\Leftrightarrow P^{-1}Y' = P^{-1}APP^{-1}Y && \text{car } PP^{-1} = I \\ &\Leftrightarrow P^{-1}Y' = DP^{-1}Y && \text{car } A = PDP^{-1} \underset{\text{q.5}}{\Leftrightarrow} P^{-1}AP = D \\ &\Leftrightarrow Z' = DZ && \text{d'après la question 10.a} \end{aligned}$$

c. En notant z_1 , z_2 et z_3 les composantes de Z , résoudre $Z' = DZ$ revient à résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{aligned} Z' = DZ &\Leftrightarrow \begin{cases} z_1' = az_1 \\ z_2' = bz_2 \\ z_3' = cz_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} z_1(x) = \alpha e^{ax} \\ z_2(x) = \beta e^{bx} \\ z_3(x) = \gamma e^{cx} \end{cases} && \text{avec } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \\ &\Leftrightarrow Z : x \mapsto \begin{pmatrix} \alpha e^{ax} \\ \beta e^{bx} \\ \gamma e^{cx} \end{pmatrix} && \text{avec } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \\ &\Leftrightarrow P^{-1}Y : x \mapsto \begin{pmatrix} \alpha e^{ax} \\ \beta e^{bx} \\ \gamma e^{cx} \end{pmatrix} && \text{avec } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \\ &\Leftrightarrow Y : x \mapsto \begin{pmatrix} \alpha e^{ax} + \beta e^{bx} + \gamma e^{cx} \\ \alpha a e^{ax} + \beta b e^{bx} + \gamma c e^{cx} \\ \alpha a^2 e^{ax} + \beta b^2 e^{bx} + \gamma c^2 e^{cx} \end{pmatrix} && \text{en multipliant à gauche par } P, \text{ avec } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

Au final, seule la première composante de Y , y , nous intéresse pour résoudre (E) . Au final, on a bien :

$$y \text{ solution de } (E) \Leftrightarrow Y' = AY \Leftrightarrow Z' = DZ \Leftrightarrow y(x) = e^{ax} + \beta e^{bx} + \gamma e^{cx} \text{ avec } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$$