# Révisions - Algèbre linéaire et bilinéaire

## Problème 1 - EML ECS 2015 - Problème 1 ⋆⋆

Dans tout le problème, on confond polynôme et application polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_k[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré au plus $k$.
On définit l'ensemble $E = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \ ; \ P(0) = P(4) = 0\}$ et le polynôme $W = X(X-4)$

**Partie I - Étude d'endomorphismes.**

1. Montrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_4[X]$.

   Pour tout polynôme $Q$ de $\mathbb{R}_2[X]$, on pose $\phi(Q) = W.Q$ .
2. Montrer que l'application $\phi \ : \ Q \longmapsto W.Q$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $E$.

3. En déduire une base et la dimension de $E$.

   Pour tout polynôme $Q$ de $\mathbb{R}_2[X]$, on considère le polynôme $\Delta(Q) = Q(X+1) - Q(X)$.
   Ainsi si par exemple $Q = X^2 - 3X + 5$ , on a : $\Delta(Q) = ((X+1)^2 - 3(X+1) + 5) - (X^2 - 3X + 5)$.
4. (a) Montrer que $\Delta$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Déterminer pour tout polynôme $Q$ de $\mathbb{R}_2[X]$ le degré du polynôme $\Delta(Q)$ en fonction de celui de $Q$.
   (c) Déterminer le noyau et l'image de $\Delta$.
   (d) Établir : $\Delta \circ \Delta \circ \Delta = 0$.

   On définit l'endomorphisme $f$ de $E$ suivant : $f = \phi \circ \Delta \circ \phi^{-1}$ , où $\phi^{-1}$ est l'application réciproque de $\phi$.
5. (a) Montrer que $f \circ f \circ f = 0$.
   (b) Déterminer une base du noyau de $f$ et une base de l'image de $f$.
   (c) Démontrer que $f$ admet une valeur propre et une seule et la déterminer.
   (d) Est-ce que $f$ est diagonalisable ?

**Partie II - Étude d'un produit scalaire**

On considère l'application $\langle \, . \, , \, . \, \rangle$ de $\mathbb{R}_4[X] \times \mathbb{R}_4[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall \, (P_1, P_2) \in \mathbb{R}_4[X] \times \mathbb{R}_4[X] \ , \qquad \langle P_1, P_2 \rangle = \sum_{k=0}^{4} P_1(k) \, P_2(k)$$

.

6. Montrer que $\langle \, . \, , \, . \, \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_4[X]$.

   On munit dorénavant $\mathbb{R}_4[X]$ de ce produit scalaire et de la norme associée notée $\| \, . \, \|$.
   On définit les trois polynômes suivants :
   $L_1 = (X-2)(X-3)$ , $L_2 = (X-1)(X-3)$ et $L_3 = (X-1)(X-2)$.
7. Montrer que la famille $(L_1, L_2, L_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

8. (a) Exprimer pour tout polynôme $P$ de $\mathbb{R}_2[X]$ les coordonnées de $P$ dans la base $(L_1, L_2, L_3)$ en fonction de $P(1)$ , $P(2)$ et $P(3)$.
   (b) Exprimer $\Delta(L_1)$ , $\Delta(L_2)$ et $\Delta(L_3)$ dans cette même base, et en déduire que la matrice de l'endomorphisme $\Delta$ dans la base $(L_1, L_2, L_3)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est $\begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3/2 & 2 \end{pmatrix}$.

   On note pour tout $i$ dans $\{1, 2, 3\}$ , $M_i = W \, L_i$.
9. (a) Montrer que pour tout $i$ dans $\{1, 2, 3\}$ , $M_i(i)$ est non nul.
   On note alors pour tout $i$ dans $\{1, 2, 3\}$ , $N_i = \frac{1}{M_i(i)} \, M_i$.

(b) Montrer que $(N_1, N_2, N_3)$ est une base orthonormée du sous-espace vectoriel $E$ de $\mathbb{R}_4[X]$.

10. Déterminer la matrice de l'application linéaire $\phi$ dans les bases $(L_1, L_2, L_3)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ et $(N_1, N_2, N_3)$ de $E$.

11. Déterminer la matrice de l'endomorphisme $f$ dans la base $(N_1, N_2, N_3)$ de $E$.

12. On note pour tout $P$ de $\mathbb{R}_4[X]$, $u(P) = \sum_{i=1}^{3} P(i)\, N_i$.
    (a) Montrer que $u$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.
    (b) Montrer que : $\forall\, P \in\ R_4[X]\ ,\ \forall\, j \in\ \{1, 2, 3\}\ ,\ \langle P - u(P)\ ,\ N_j\rangle = 0$.
    (c) En déduire que $u$ est la projection orthogonale sur $E$.
    (d) Déterminer le projeté orthogonal de $Q = X^2\,(X-2)\,(X-3)$ sur $E$.

## Exercice 2 - EDHEC ECS 2019 - Exercice 3 ⋆⋆⋆

Dans tout l'exercice, $n$ désigne un entier naturel non nul. On se place dans un espace euclidien $E$ de dimension $n$ et on note $\mathcal{B} = (e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n)$ une base orthonormale de $E$. Le produit scalaire des vecteurs $x$ et $y$ de $E$ est noté $\langle x, y\rangle$ et la norme de $x$ est notée $\|x\|$.

**Partie I - définition de l'adjoint $u^\star$ d'un endomorphisme $u$ de $E$.**

Dans toute cette partie, $u$ désigné un endomorphisme de $E$.

On se propose de montrer qu'il existe un unique endomorphisme de $E$, noté $u^\star$, qui à tout vecteur $y$ de $E$ associe le vecteur $u^\star(y)$ vérifiant :

$$\forall x \in E,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^\star(y)\rangle$$

1. (a) Montrer que si $u^\star$ existe, alors on a, pour tout $y$ de $E$ :

$$u^\star(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), y\rangle e_i$$

   (b) En déduire que si $u^\star$ existe, alors $u^\star$ est unique.
2. (a) Vérifier que l'application $u^\star$ définie par l'égalité établie à la question 1.$(a)$ est effectivement un endomorphisme de $E$.
   (b) Conclure que cette application est solution du problème posé, c'est-à-dire que c'est l'unique endomorphisme de $E$, appelé *adjoint* de $u$, vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^\star(y)\rangle$$

**Partie II - Étude des endomorphismes normaux.**

On dit que $u$ est un endomorphisme normal quand on a l'égalité :

$$u \circ u^\star = u^\star \circ u$$

*Dans la suite, $u$ désigne un endomorphisme normal.*

3. (a) Montrer que : $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|u^\star(x)\|$.
   (b) En déduire que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^\star)$.
4. Montrer que si $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ stable par $u$, alors $F^\perp$ est stable par $u^\star$.
5. On suppose que $u$ possède une valeur propre $\lambda$ et on note $E_\lambda$ le sous espace propre associé.
   (a) Montrer que $E_\lambda$ est stable par $u^\star$.
   (b) Établir que $(u^\star)^\star = u$ puis en déduire que $E_\lambda^\perp$ est stable par $u$.

*On revient au cas général $u$ quelconque*

6. Démontrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :
   i. $u$ est normal

ii. $\forall (x,y) \in E^2, \langle u(x), u(y)\rangle = \langle u^\star(x), u^\star(y)\rangle$.

iii. $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|u^\star(x)\|$.

On pourra, par exemple, successivement prouver les implications : $i \Rightarrow ii, ii \Rightarrow iii, iii \Rightarrow ii$ et $ii \Rightarrow i$.

## Problème 3 - EML ECS 2002 - Problème 2 ⋆⋆⋆

Soit $E$ un espace vectoriel euclidien de dimension $n$, dont le produit scalaire est noté $\langle , \rangle$.
L'objectif du problème est d'étudier les endomorphismes $u$ de $E$ tels que

$$\forall x \in E,\ \langle u(x), x\rangle = 0$$

Les endomorphismes vérifiant cette propriété sont appelés endomorphismes antisymétriques.

**Partie I - Étude d'un exemple**

Dans cette partie, $E$ est l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2. On rappelle que $(1, X, X^2)$ est une base de $E$.
On considère l'application $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout couple $(P,Q)$ d'éléments de $E$ par :

$$\varphi(P,Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(-1)Q(-1)$$

1. Vérifier que $\varphi$ est un produit scalaire.
   *Dans cette première partie, on considère que $E$ est muni de ce produit scalaire.*
2. On considère l'endomorphisme $u$ de $E$ défini pour tout $P$ de $E$ par :
   $$u(P) = 2P'(0)X^2 - (P(1) + P(-1))\,X.$$
   (a) Vérifier que $\forall P \in E,\ 2P'(0) - P(1) + P(-1) = 0$.
   (b) En déduire que $u$ est un endomorphisme antisymétrique de l'espace vectoriel euclidien $E$.
3. Soit $P_1 = \frac{1}{2}(X^2 + X)$ et $P_2 = \frac{1}{2}u(P_1)$.
   (a) Vérifier que $P_1$ est un vecteur propre de $u^2$ et que la famille $(P_1, P_2)$ est orthonormale.
   (b) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(u)$.
   (c) Déterminer une base orthonormale $\mathcal{B}$ de $E$ et un nombre réel $a$ tels que la matrice associée à $u$ relativement à cette base soit $\begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**Partie II - Caractérisations des endomorphismes antisymétriques**

Soit $u$ un endomorphisme de $E$.

1. Pour tout couple $(x,y)$ de $E^2$, développer $\langle u(x+y), x+y\rangle$.
   En déduire que $u$ est un endomorphisme antisymétrique si et seulement si :
   $$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle$$
2. On suppose dans cette question que la dimension $n$ de $E$ est non nulle.
   Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormale de $E$, et $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice associée à $u$ relativement à la base $\mathcal{B}$.
   (a) Montrer que $\forall (i,j) \in \{1, \cdots, n\}^2,\ m_{i,j} = \langle e_i, u(e_j)\rangle$.
   (b) En déduire que $u$ est un endomorphisme antisymétrique si et seulement si la matrice $M$ associée à $u$ relativement à la base $\mathcal{B}$ vérifie ${}^tM = -M$.

**Partie III - Propriétés générales des endomorphismes antisymétriques**

Soit $u$ un endomorphisme antisymétrique non nul de $E$.
On pourra utiliser la caractérisation obtenue dans la question **II.1.**

1. Soit $\lambda$ un nombre réel. Montrer que si $\lambda$ est valeur propre de $u$, alors $\lambda = 0$.

2. Montrer que $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont orthogonaux et supplémentaires dans $E$.
   En déduire que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$.
3. Montrer que $u^2$ est un endomorphisme symétrique de $E$ et que toute valeur propre de $u^2$ est négative ou nulle.
4. (a) Montrer que $u^2$ admet au moins une valeur propre non nulle.
   Soit $x$ un vecteur propre de $u^2$ associé à une valeur propre non nulle et $F$ le sous-espace vectoriel de $E$ engendré par $(x, u(x))$.
   (b) Montrer que $F$ est un plan vectoriel stable par $u$.
   (c) Montrer que $F^\perp$, le supplémentaire orthogonal de $F$, est stable par $u$.
   (d) On munit $F^\perp$ du produit scalaire $\langle , \rangle_1$ défini pour tout couple $(x, y)$ d'éléments de $F^\perp$ par

$$\langle x, y\rangle_1 = \langle x, y\rangle$$

   On définit l'endomorphisme $u_1$ de $F^\perp$ par, $\forall x \in F^\perp,\ u_1(x) = u(x)$.
   Montrer que $u_1$ est un endomorphisme antisymétrique de $F^\perp$ et que $\mathrm{Im}(u) = F \oplus \mathrm{Im}(u_1)$.
5. Montrer que le rang d'un endomorphisme antisymétrique est pair. On pourra faire une récurrence sur la dimension de $E$.

**Partie IV - Application**

Dans cette partie, $E$ est un espace vectoriel euclidien de dimension 4 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base orthonormale de $E$.
Soit $u$ l'endomorphisme de $E$ associé, relativement à la base $\mathcal{B}$, à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $u$ est un endomorphisme antisymétrique de $E$.
   Vérifier que le vecteur $f_1 = e_1 + e_2 - e_3$ est vecteur propre de $u^2$.
2. Soit $F$ le sous-espace vectoriel de $E$ engendré par la famille $(f_1, u(f_1))$. Déterminer une base orthonormale de $F$ et une base orthonormale de $F^\perp$.
3. En déduire une base orthonormale $\mathcal{B}_0$ de $E$ et deux nombres réels $a$ et $b$ tels que la matrice associée à $u$ relativement à $\mathcal{B}_0$ soit $\begin{pmatrix} 0 & -a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & b & 0 \end{pmatrix}$.