

CORRECTION - ALGÈBRE LINÉAIRE ET BILINÉAIRE

Problème 1 - EML ECS 2015 - Problème 1

Partie I - Étude d'endomorphismes.

1. Il est clair que le polynôme nul appartient à E .

Soit $(P, Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$(P + \lambda Q)(0) = P(0) + \lambda Q(0) = 0 \quad \text{et} \quad (P + \lambda Q)(4) = P(4) + \lambda Q(4) = 0$$

Ainsi $P + \lambda Q \in E$.

E est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.

On aurait aussi pu dire que E est l'intersection des noyaux des deux formes linéaires $P \mapsto P(0)$ et $P \mapsto P(4)$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ alors $\deg(P) \leq 2$, ainsi $\deg(\phi(P)) = \deg(WP) = \deg(W) + \deg(P) \leq 2 + 2 \leq 4$

De plus on a $\phi(P)(0) = W(0)P(0) = 0P(0) = 0$ et $\phi(P)(4) = W(4)P(4) = 0P(4) = 0$. On a donc bien $\phi(P) \in E$.

Soit $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}_2[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\phi(P_1 + \lambda P_2) = W(P_1 + \lambda P_2) = WP_1 + \lambda WP_2 = \phi(P_1) + \lambda \phi(P_2)$$

Ainsi ϕ est bien une application linéaire.

Soit $Q \in E$, par définition de E 0 et 4 sont des racines de Q , ainsi q peut se factoriser par $X(X - 4)$, il existe ainsi R tel que $Q = X(X - 4)R = WR = \phi(R)$.

ϕ est ainsi surjective dans E .

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\phi(P) = 0$ on a donc $WP = 0$. On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}, \quad P(x) = 0$$

P admet alors une infinité de racines et est donc le polynôme nul.

On a ainsi $\ker(\phi) = \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}$, on en déduit que ϕ est injective.

Finalement ϕ est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans E à la fois injective et surjective, c'est donc un isomorphisme.

3. On sait que $\mathbb{R}_2[X]$ est un espace vectoriel de dimension 3 et que $(1, X, X^2)$ est une base de E .

Comme ϕ est un isomorphisme entre $\mathbb{R}_2[X]$ et E alors E est un espace vectoriel de dimension 3 et la famille $(\phi(1), \phi(X), \phi(X^2))$ est une base de E , i.e. $(X(X - 4), X^2(X - 4), X^3(X - 4))$ est une base de E .

4. (a) Soit $p \in \mathbb{R}_2[X]$, alors $\Delta(P)$ est encore un polynôme, de plus

$$\deg(\Delta(P)) \leq \max(\deg(P), \deg(P(X + 1))) \leq \max(\deg(P), \deg(P)) \leq \deg(P) \leq 2$$

Δ prend donc ses valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Soit $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}_2[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a alors

$$\begin{aligned} \Delta(P_1 + \lambda P_2) &= (P_1 + \lambda P_2)(X + 1) - (P_1 + \lambda P_2)(X) \\ &= P_1(X + 1) + \lambda P_2(X + 1) - P_1(X) - \lambda P_2(X) \\ &= \Delta(P_1) + \lambda \Delta(P_2) \end{aligned}$$

Ainsi Δ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

Remarque : $\Delta(P) = \frac{P(X+1) - P(X)}{X+1-X}$ est appelé la dérivée discrète de P , la plupart des propriétés de Δ sont analogues à celle de l'application $P \mapsto P'$.

- (b) Si Q est constant (i.e. de degré 0) alors $\Delta(Q) = 0$ et donc $\deg(\Delta(Q)) = -\infty$.

On va ensuite procéder par récurrence forte sur $d = \deg(Q)$ pour montrer que $\deg(\Delta(Q)) = \deg(Q) - 1$.

Remarque : On peut simplement écrire $Q = aX^2 + bX + c$, calculer $\Delta(Q)$ et étudier le degré du résultat mais on va ici proposer une méthode qui fonctionne sur $\mathbb{R}_n[X]$ avec n quelconque.

- **Initialisation :**

Soit Q un polynôme de degré 1, on peut donc écrire $Q = aX$ avec $a \neq 0$, alors $\Delta(Q) = a(X+1) - aX = a$ et donc $\deg(\Delta(Q)) = \deg(Q) - 1$

- **Hérédité :** Soit $d \in \mathbb{N}$, on suppose que, si $\deg(Q) \leq d - 1$ alors $\deg(\Delta(Q)) = \deg(Q) - 1$.

Soit $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ un polynôme de degré $d \geq 1$, on peut alors écrire $Q = a_d X^d + \tilde{Q}$ où $\deg(\tilde{Q}) \leq d - 1$ et $a_d \neq 0$. On a alors

$$\Delta(Q) = \Delta(a_d X^d + \tilde{Q}) = a_d \Delta(X^d) + \Delta(\tilde{Q})$$

D'après l'hypothèse de récurrence $\deg(\Delta(\tilde{Q})) = \deg(\tilde{Q}) - 1 \leq d - 2$.

On a

$$\Delta(X^d) = (X+1)^d - X^d = \left(\sum_{k=0}^d \binom{d}{k} X^k \right) - X^d = \sum_{k=0}^{d-1} \binom{d}{k} X^k$$

Ainsi $\deg(\Delta(X^d)) = d - 1$ et donc, $\deg(a_d \Delta(X^d)) = d - 1$.

Alors, comme $\deg(a_d \Delta(X^d)) > \deg(\Delta(\tilde{Q}))$ on a

$$\deg(\Delta(Q)) = \deg(a_d X^d + \tilde{Q}) = \deg(a_d X^d) = d - 1$$

Ce qui prouve la propriété au rang $d + 1$ et achève la récurrence.

Ainsi, si $\deg(Q) = 0$ alors $\deg(Q) = -\infty$ et si $\deg(Q) \geq 1$ alors $\deg(\Delta(Q)) = \deg(Q) - 1$.

(c) On a $Q \in \ker(\Delta)$ si et seulement si $\Delta(Q) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\deg(\Delta(Q)) = -\infty$.

D'après la question précédente on a donc $\ker(\Delta) = \mathbb{R}_0[X]$ (l'ensemble des polynômes constants).

Là encore d'après la question précédente on a $\text{Im}(\Delta) \subset \mathbb{R}_1[X]$. De plus

$$\dim(\text{Im}(\Delta)) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) - \dim(\text{Ker}(\Delta)) = 3 - 1 = 2 = \dim(\mathbb{R}_1[X])$$

Ainsi $\text{Im}(\Delta) = \mathbb{R}_1[X]$.

(d) On a montré précédemment que $\deg(\Delta(P)) \leq \deg(P) - 1$. Ainsi on a

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \deg(\Delta \circ \Delta \circ \Delta(P)) \leq \deg(P) - 3 \leq -1$$

D'où $\deg(\Delta \circ \Delta \circ \Delta(P)) = -\infty$, i.e. $\Delta \circ \Delta \circ \Delta(P) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$

On a donc bien $\Delta \circ \Delta \circ \Delta = 0$.

5. (a) On a

$$\begin{aligned} f \circ f \circ f &= \phi \circ \Delta \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \Delta \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \Delta \circ \phi^{-1} \\ &= \phi \circ \Delta \circ \text{Id}_E \circ \Delta \circ \text{Id}_E \circ \Delta \circ \phi^{-1} \\ &= \phi \circ \Delta \circ \Delta \circ \Delta \circ \phi^{-1} \\ &= \phi \circ 0 \circ \phi^{-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

(b) Soit $P \in \text{Ker}(f)$, on a donc $\phi(\Delta(\phi^{-1}(P))) = 0$.

Or ϕ est injective donc $\Delta(\phi^{-1}(P)) = 0$ i.e. $\phi^{-1}(P) \in \text{Ker}(\Delta)$.

Il existe ainsi $a \in \mathbb{R}$ tel que $\phi^{-1}(P) = a$, d'où $P = \phi(a) = aW$.

D'où $\ker(f) \subset \{aW, a \in \mathbb{R}\}$.

Réciproquement, pour $a \in \mathbb{R}$ on a $f(aW) = \phi \circ \Delta \circ \phi^{-1}(\phi(a)) = \phi(\Delta(a)) = \phi(0) = 0$.

Ainsi $\ker(f) = \{aW, a \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(W)$.

W est donc une base du noyau de f .

Soit $P \in \mathbb{R}_1[X] = \text{Im}(\Delta)$, il existe alors $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P = \Delta(Q)$, ainsi

$$WP = \phi(P) = \phi \circ \Delta(Q) = (\phi \circ \Delta \circ \phi^{-1})(\phi(Q)) = f(\phi(Q))$$

On en déduit que $WP \in \text{Im}(f)$. Ainsi $\{WP, P \in \mathbb{R}_1[X]\} \subset \text{Im}(f)$.

D'après le théorème du rang on a

$$\dim(\text{Im}(f)) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(f)) = 3 - 1 = 2$$

De plus

$$\dim(\{WP, P \in \mathbb{R}_1[X]\}) = \dim(\phi(\mathbb{R}_1[X])) \underbrace{=}_{\substack{\text{car } \phi \text{ est} \\ \text{un isomorphisme}}} \dim(\mathbb{R}_1[X])$$

Ainsi, on a $\text{Im}(f) = \{WP, P \in \mathbb{R}_1[X]\} = \text{Vect}(W, XW)$, (W, XW) est alors une base de $\text{Im}(f)$.

- (c) D'après la question 5.(a) f est annulé par la polynôme X^3 . Les valeurs propres de f sont donc incluses dans les racines de X^3 , ainsi $\text{Sp}(f) \subset \{0\}$.

De plus f n'est pas bijective (sinon $f^3 = 0$ le serait aussi), ainsi 0 est une valeur propre de f . Ainsi f admet 0 comme unique valeur propre

- (d) Si f était diagonalisable alors f serait semblable à 0Id , on aurait donc $f = 0$ ce qui n'est pas le cas (car $\ker(f) \neq E$). Ainsi f n'est pas diagonalisable.

Partie II - Étude d'un produit scalaire

6. Soit $(P_1, P_2, Q) \in \mathbb{R}_4[X]^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \langle P_1 + \lambda P_2, Q \rangle &= \sum_{k=0}^4 (P_1 + \lambda P_2)(k)Q(k) \\ &= \sum_{k=0}^4 P_1(k)Q(k) + \lambda \sum_{k=0}^4 P_2(k)Q(k) \\ &= \sum_{k=0}^4 P_1(k)Q(k) + \lambda \sum_{k=0}^4 P_2(k)Q(k) \\ &= \langle P_1, Q \rangle + \lambda \langle P_2, Q \rangle \end{aligned}$$

Ainsi l'application $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle$ est linéaire à gauche.

On a de plus

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^4 P(k)Q(k) = \sum_{k=0}^4 Q(k)P(k) = \langle Q, P \rangle$$

Ainsi l'application $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle$ est symétrique, comme elle est linéaire à gauche elle est donc bilinéaire.

Pour $P \in \mathbb{R}_4[X]$ on a

$$\langle P, P \rangle = \sum_{k=0}^4 P(k)^2 \geq 0$$

Ainsi l'application $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle$ est une forme bilinéaire positive.

Enfin soit $P \in \mathbb{R}_4[X]$ tel que $\langle P, P \rangle = 0$, on a alors $\sum_{k=0}^4 P(k)^2 = 0$.

Une somme de réels positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls, ainsi

$$\forall k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket, \quad P(k) = 0$$

P admet donc comme racines 0, 1, 2, 3 et 4. P est alors un polynôme de degré inférieur ou égal à 4 qui admet au moins 5 racines, P admet donc strictement plus de racines que son degré et donc P est le polynôme nul.

Finalement l'application $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle$ est une forme bilinéaire définie positive, c'est-à-dire un produit scalaire.

7. On va montrer que la famille (L_1, L_2, L_3) est libre dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\alpha L_1 + \beta L_2 + \gamma L_3 = 0$$

En particulier on a

$$\alpha L_1(1) + \beta L_2(1) + \gamma L_3(1) = 0$$

$$\alpha L_1(2) + \beta L_2(2) + \gamma L_3(2) = 0$$

$$\alpha L_1(3) + \beta L_2(3) + \gamma L_3(3) = 0$$

C'est-à-dire

$$2\alpha = 0, \quad -\beta = 0, \quad 2\gamma = 0$$

Ainsi $\alpha = \beta = \gamma = 0$. La famille (L_1, L_2, L_3) est donc libre dans $\mathbb{R}_2[X]$. Il s'agit d'une famille libre de cardinal 3 dans un espace vectoriel de dimension 3, (L_1, L_2, L_3) donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

8. (a) Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$P = aL_1 + bL_2 + cL_3$$

On a alors

$$P(1) = 2a \quad P(2) = -b \quad P(3) = 2c$$

Ainsi

$$P = \frac{P(1)}{2}L_1 - P(2)L_2 + \frac{P(3)}{2}L_3$$

où encore $\text{Mat}_{(L_1, L_2, L_3)}(P) = \begin{pmatrix} \frac{P(1)}{2} \\ -P(2) \\ \frac{P(3)}{2} \end{pmatrix}$

- (b) On a

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{(L_1, L_2, L_3)}(\Delta(L_1)) &= \begin{pmatrix} \frac{\Delta(L_1)(1)}{2} \\ -\Delta(L_1)(2) \\ \frac{\Delta(L_1)(3)}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{L_1(2) - L_1(1)}{2} \\ -L_1(3) + L_1(2) \\ \frac{L_1(4) - L_1(3)}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \text{Mat}_{(L_1, L_2, L_3)}(\Delta(L_2)) &= \begin{pmatrix} \frac{\Delta(L_2)(1)}{2} \\ -\Delta(L_2)(2) \\ \frac{\Delta(L_2)(3)}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{L_2(2) - L_2(1)}{2} \\ -L_2(3) + L_2(2) \\ \frac{L_2(4) - L_2(3)}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 3/2 \end{pmatrix} \\ \text{Mat}_{(L_1, L_2, L_3)}(\Delta(L_3)) &= \begin{pmatrix} \frac{\Delta(L_3)(1)}{2} \\ -\Delta(L_3)(2) \\ \frac{\Delta(L_3)(3)}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{L_3(2) - L_3(1)}{2} \\ -L_3(3) + L_3(2) \\ \frac{L_3(4) - L_3(3)}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\text{Mat}_{(L_1, L_2, L_3)}(\Delta) = \text{Mat}_{(L_1, L_2, L_3)}(\Delta(L_1), \Delta(L_2), \Delta(L_3)) = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3/2 & 2 \end{pmatrix}$$

9. (a) Soit i dans $\{1, 2, 3\}$, on a $M_i(i) = \prod_{k=0, k \neq i}^4 (i - k) \neq 0$.

- (b) Soit $i \in \{1, 2, 3\}$, remarquons que, pour $k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$ on a $N_i(k) = 0$ si $k \neq i$ et $N_i(i) = 1$, ainsi

$$\|N_i\| = \sum_{k=0}^4 N_i(k)^2 = N_i(i)^2 = 1^2 = 1$$

De plus pour $(i, j) \in \{1, 2, 3\}$ avec $i \neq j$ on a

$$\forall k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket, \quad N_i(k)N_j(k) = 0$$

En effet $N_i(k)N_j(k)$ est nul sauf si $i = k = j$ ce qui est impossible.

Ainsi $\{N_i, N_j\} = \sum_{k=0}^4 N_i(k)N_j(k) = 0$.

La famille (N_1, N_2, N_3) est ainsi une famille orthonormée (donc libre) de cardinal de E qui est un espace vectoriel de dimension 3, c'est donc une base orthonormée de E .

10. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$ on a $\phi(L_i) = WL_i = M_i(i)N_i$. D'où

$$\phi(L_1) = M_1(1)N_1 = -6, \quad \phi(L_2) = M_2(2)N_2 = 4, \quad \phi(L_3) = M_3(3)N_3 = -6$$

Ainsi la matrice de l'application linéaire ϕ dans les bases (L_1, L_2, L_3) de $\mathbb{R}_2[X]$ et (N_1, N_2, N_3) de E est

$$\text{Mat}_{(N_1, N_2, N_3), (L_1, L_2, L_3)}(\phi) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

11. On sait que $f = \phi \circ \Delta \circ \phi^{-1}$ ainsi

$$\begin{aligned}
 \text{Mat}_{(N_1, N_2, N_3)}(f) &= \text{Mat}_{(N_1, N_2, N_3), (L_1, L_2, L_3)}(\phi) \text{Mat}_{(N_1, N_2, N_3)}(\Delta) \text{Mat}_{(L_1, L_2, L_3), (N_1, N_2, N_3)}(\phi^{-1}) \\
 &= \text{Mat}_{(N_1, N_2, N_3), (L_1, L_2, L_3)}(\phi) \text{Mat}_{(N_1, N_2, N_3)}(\Delta) \text{Mat}_{(N_1, N_2, N_3), (L_1, L_2, L_3)}(\phi)^{-1} \\
 &= \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3/2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}^{-1} \\
 &= \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3/2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 \\ -6 & -9 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & -1 & \frac{4}{3} \\ 1 & -\frac{9}{4} & 2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

12. (a) Soit P de $\mathbb{R}_4[X]$, on a

$$u(P) = \sum_{i=1}^3 P(i) N_i \in \text{Vect}(N_1, N_2, N_3)$$

D'où $u(P) \in E \subset \mathbb{R}_4[X]$.

Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_4[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$u(P + \lambda Q) = \sum_{i=1}^3 (P + \lambda Q)(i) N_i = \sum_{i=1}^3 P(i) N_i + \lambda \sum_{i=1}^3 Q(i) N_i = \sum_{i=1}^3 P(i) N_i + \lambda \sum_{i=1}^3 Q(i) N_i = u(P) + \lambda u(Q)$$

u est donc une application linéaire définie sur $\mathbb{R}_4[X]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_4[X]$, i.e. un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.

(b) **Remarque :**

On peut « court-circuiter » les deux questions suivantes : On sait que, pour $k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$ on a $N_i(k) = 0$ si $k \neq i$ et $N_i(i) = 1$, et donc

$$\forall P \in \mathbb{R}_4[X], \langle P, N_i \rangle = \sum_{k=0}^4 P(k) N_i(k) = P(i)$$

Ainsi

$$\forall P \in \mathbb{R}_4[X], \quad u(P) = \sum_{i=1}^3 \langle P, N_i \rangle N_i$$

On sait de plus que (N_1, N_2, N_3) une base orthonormée de E . On reconnaît alors dans u l'expression de la projection orthogonale sur E .

Soit $P \in \mathbb{R}_4[X]$ et $j \in \{1, 2, 3\}$, on a

$$\begin{aligned}
 \langle P - u(P), N_j \rangle &= \sum_{k=0}^4 (P - u(P))(k) N_j(k) \\
 &= (P - u(P))(j) \\
 &= P(j) - \sum_{i=1}^3 P(i) N_i(j) \\
 &= P(j) - P(j) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

(c) La question précédente nous montre que, pour $P \in \mathbb{R}_4[X]$ on a $P - u(P) \in E^\perp$ (car $P - u(P)$ est orthogonal à une base de E).

On a donc $u(P) \in E$ et $P - u(P) \in E^\perp$. Ainsi $u(P)$ est le projeté orthogonal de P sur E .

u est donc la projection orthogonal sur E .

(d) Le projeté orthogonal de $Q = X^2(X - 2)(X - 3)$ sur E est

$$\begin{aligned} u(Q) &= Q(1)N_1 + Q(2)N_2 + Q(3)N_3 \\ &= Q(1)N_1 \\ &= 2N_1 \\ &= -\frac{2}{6}X(X - 2)(X - 3)(X - 4) \\ &= -\frac{X(X - 2)(X - 3)(X - 4)}{3} \end{aligned}$$

Exercice 2 - EDHEC ECS 2019 - Exercice 3

Partie I - Définition de l'adjoint u^* d'un endomorphisme u de E .

1. (a) Par l'expression d'un vecteur dans la base orthonormée \mathcal{B} , on a :

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$$

et en particulier, pour $x = u^*(y)$, nous avons $u^*(y) = \sum_{i=1}^n \langle u^*(y), e_i \rangle e_i$.

Or $\langle u^*(y), e_i \rangle = \langle e_i, u^*(y) \rangle = \langle u(e_i), y \rangle$, donc pour tout y de E :

$$u^*(y) = \sum_{i=1}^n \langle u(e_i), y \rangle e_i$$

(b) Si u^* existe, $u^*(y)$ est parfaitement déterminé par la donnée de y , et des données de l'énoncé (u et la base \mathcal{B}).

Si u^* existe, u^* est unique.

2. (a) Soit $f : y \mapsto \sum_{i=1}^n \langle u(e_i), y \rangle e_i$.

f est une application de E dans E (pour $y \in E$, $f(y)$ est une combinaison linéaire des vecteurs de \mathcal{B}). Soient λ réel et x et y vecteurs de E . On a :

$$\begin{aligned} f(\lambda x + y) &= \sum_{i=1}^n \langle u(e_i), \lambda x + y \rangle e_i \\ &\text{et par linéarité à droite du produit scalaire :} \\ &= \sum_{i=1}^n (\lambda \langle u(e_i), x \rangle + \langle u(e_i), y \rangle) e_i \\ &= \sum_{i=1}^n (\lambda \langle u(e_i), x \rangle e_i + \langle u(e_i), y \rangle e_i) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^n \langle u(e_i), x \rangle e_i + \sum_{i=1}^n \langle u(e_i), y \rangle e_i \\ &= \lambda f(x) + f(y) \end{aligned}$$

donc f est une application linéaire.

L'application u^* définie par l'égalité du 1.a. est un endomorphisme de E .

(b) Enfin, pour x et y dans E , avec la notation f de la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} \langle x, f(y) \rangle &= \left\langle x, \sum_{i=1}^n \langle u(e_i), y \rangle e_i \right\rangle \\ &\text{par linéarité à droite du produit scalaire :} \\ &= \sum_{i=1}^n \langle u(e_i), y \rangle \langle x, e_i \rangle \\ &\text{par linéarité à gauche du produit scalaire :} \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle u(e_i), y \right\rangle \\ &\text{par linéarité de } u : \\ &= \left\langle u \left(\sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i \right), y \right\rangle = \langle u(x), y \rangle \end{aligned}$$

Donc l'application f est solution du problème posé.

Par analyse-synthèse, nous avons montré l'existence et l'unicité de l'endomorphisme adjoint u^* de u , vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$$

Partie II - Études des endomorphismes normaux.

3. (a) Pour $x \in E$,

$$\begin{aligned} \|u(x)\|^2 &= \langle u(x), u(x) \rangle = \langle x, u^*(u(x)) \rangle \\ &= \langle x, u(u^*(x)) \rangle \text{ car } u \text{ est normal} \\ &= \langle u(u^*(x)), x \rangle = \langle u^*(x), u^*(x) \rangle \\ &= \|u^*(x)\|^2 \end{aligned}$$

Comme les normes sont positives, $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.

(b) On a $x \in \ker u \Leftrightarrow u(x) = 0 \Leftrightarrow \|u(x)\| = 0 \Leftrightarrow \|u^*(x)\| = 0 \Leftrightarrow u^*(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \ker u^*$.

$$\boxed{\ker u = \ker u^*}$$

4. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u . Soit $x \in F^\perp$. Pour tout $y \in F$, nous avons :

$$\langle u^*(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$$

Comme $y \in F$ et que F est stable par u , $u(y)$ appartient à F . Et $x \in F^\perp$, donc $\langle x, u(y) \rangle = 0$.

Ainsi $\langle u^*(x), y \rangle = 0$ et $u^*(x) \in F^\perp$.

$$\boxed{\text{Si } F \text{ est stable par } u, F^\perp \text{ est stable par } u^*.$$

5. (a) Soit $x \in E_\lambda$. On a $u(x) = \lambda x$. En composant par u^* linéaire, on a

$u^*(u(x)) = \lambda u^*(x)$, et comme u est normal, $u(u^*(x)) = \lambda u^*(x)$. Ainsi $u^*(x) \in E_\lambda$.

$$\boxed{E_\lambda \text{ est stable par } u^*.$$

(b) Soient x et y dans E . On a :

$$\langle u(y), x \rangle = \langle y, u^*(x) \rangle \text{ par définition de } u^*$$

$$\text{soit, écrit autrement, } \langle u^*(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$$

Par la définition d'un adjoint, on reconnaît, par unicité de l'adjoint, que $(u^*)^* = u$.

On applique 5. avec $F = E_\lambda$ et l'endomorphisme u^* . On obtient : E_λ^\perp est stable par $(u^*)^*$, c'est-à-dire u .

$$\boxed{E_\lambda^\perp \text{ est stable par } u.$$

6. Montrons les implications suggérées par l'énoncé. Soit $(u, u^*) \in ((E))^2$ définis comme dans l'énoncé.

i)⇒ii) On a :

$$\begin{aligned}\langle u(x), u(y) \rangle &= \langle x, u^*(u(y)) \rangle && \text{par définition de } u^* \\ &= \langle x, u(u^*(y)) \rangle && \text{d'après l'hypothèse i)} \\ &= \langle u^*(x), u^*(y) \rangle && \text{par définition de } u^* \text{ et symétrie du produit scalaire}\end{aligned}$$

ii)⇒iii) Est immédiat en choisissant $y = x$.

iii)⇒ii) Employons une identité de polarisation.

$$\begin{aligned}\langle u(x), u(y) \rangle &= \frac{1}{2}(\|u(x) + u(y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|u(x+y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2) && \text{car } u \text{ est linéaire} \\ &= \frac{1}{2}(\|u^*(x+y)\|^2 - \|u^*(x)\|^2 - \|u^*(y)\|^2) && \text{d'après l'hypothèse iii)} \\ &= \frac{1}{2}(\|u^*(x) + u^*(y)\|^2 - \|u^*(x)\|^2 - \|u^*(y)\|^2) && \text{car } u^* \text{ est linéaire} \\ &= \langle u^*(x), u^*(y) \rangle && \text{par une identité de polarisation}\end{aligned}$$

ii)⇒i) Soit $a \in E$. Pour tout $z \in E$, on a :

$$\begin{aligned}\langle u \circ u^*(a), z \rangle &= \langle u^*(a), u^*(z) \rangle && \text{par définition de } u^* \\ &= \langle u(a), u(z) \rangle && \text{d'après ii)} \\ &= \langle u^* \circ u(a), z \rangle && \text{par définition de } u^*\end{aligned}$$

Ainsi, le vecteur $u \circ u^*(a) - u^* \circ u(a)$ est orthogonal à tout élément de E (il est en particulier orthogonal à lui-même) : c'est donc le vecteur nul. En définitive, $\forall a \in E$, $u \circ u^*(a) - u^* \circ u(a) = 0_E$, donc $u \circ u^* - u^* \circ u = 0_{(E)}$, d'où i).

Problème 3 - EML ECS 2002 - Problème 2

Partie I - Étude d'un exemple

1. Remarquons que l'on peut écrire $\varphi(P, Q) = \sum_{k=-1}^1 P(k)Q(k)$

Soit $(P_1, P_2, Q) \in \mathbb{R}_2[X]^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\varphi(P_1 + \lambda P_2, Q) &= \sum_{k=-1}^1 (P_1 + \lambda P_2)(k)Q(k) \\ &= \sum_{k=-1}^1 P_1(k)Q(k) + \lambda \sum_{k=-1}^1 P_2(k)Q(k) \\ &= \sum_{k=-1}^1 P_1(k)Q(k) + \lambda \sum_{k=-1}^1 P_2(k)Q(k) \\ &= \varphi(P_1, Q) + \lambda \varphi(P_2, Q)\end{aligned}$$

Ainsi φ est linéaire à gauche.

On a de plus

$$\varphi(P, Q) = \sum_{k=-1}^1 P(k)Q(k) = \sum_{k=-1}^1 Q(k)P(k) = \varphi(Q, P)$$

Ainsi l'application φ est symétrique, comme elle est linéaire à gauche elle est donc bilinéaire.

Pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$ on a

$$\varphi(P, P) = \sum_{k=-1}^1 P(k)^2 \geq 0$$

Ainsi l'application φ est une forme bilinéaire positive.

Enfin soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\varphi(P, P) = 0$, on a alors $\sum_{k=-1}^1 P(k)^2 = 0$.

Une somme de réels positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls, ainsi

$$\forall k \in \llbracket -1, 1 \rrbracket, \quad P(k) = 0$$

P admet donc comme racines $-1, 0$ et 1 . P est alors un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 qui admet au moins 3 racines, P admet ainsi strictement plus de racines que son degré et donc P est le polynôme nul.

Finalement l'application φ est une forme bilinéaire définie positive, c'est-à-dire un produit scalaire.

2. (a) Soit $P \in E$, il existe donc $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P = aX^2 + bX + c$. On a alors

$$\begin{aligned} 2P'(0) - P(1) + P(-1) &= 2(2a \times 0 + b) - (a + b + c) + (a(-1)^2 + b(-1) + c) \\ &= 2b - a - b - c + a - b + c \\ &= 0 \end{aligned}$$

On a donc bien

$$\boxed{\forall P \in E, \quad 2P'(0) - P(1) + P(-1) = 0}$$

(b) Soit $P \in \mathbb{R}^2[X]$, on a

$$\begin{aligned} \varphi(u(P), P) &= \varphi(2P'(0)X^2 - (P(1) + P(-1))X, P) \\ &= 0P(0) + (2P'(0) - P(1) - P(-1))P(1) + (2P'(0) + P(1) + P(-1))P(-1) \\ &= (P(-1) + P(1))2P'(0) - P(1)^2 + P(-1)^2 \\ &= (P(-1) + P(1))2P'(0) + (P(-1) + P(1))(P(-1) - P(1)) \\ &= (P(-1) + P(1))(2P'(0) + P(-1) - P(1)) \\ &= (P(-1) + P(1)) \times 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi u est bien un endomorphisme antisymétrique de E .

3. (a) On a

$$u(P_1) = 2P_1'(0)X^2 - (P_1(1) + P_1(-1))X = 2 \frac{1}{2}X^2 - (1 + 0)X = X^2 - X$$

On a donc $P_2 = \frac{1}{2}(X^2 - X)$

Et

$$u^2(P_1) = u(u(P_1)) = 2 \times (-1)X^2 - (0 + 2)X = -2X^2 - 2X = -4P_1$$

Ainsi P_1 est un vecteur propre de u associé à la valeur propre -4 .

Comme u est antisymétrique on sait que, pour tout $P \in E$, $u(P)$ et P sont orthogonaux, on a donc $\varphi(u(P_1), P_1) = 0$.

Ainsi

$$\varphi(P_2, P_1) = \varphi\left(\frac{1}{2}u(P_1), P_1\right) = \frac{1}{2}\varphi(u(P_1), P_1) = 0$$

La famille (P_1, P_2) est donc orthogonale.

Enfin

$$\begin{aligned} \|P_1\|^2 &= \varphi(P_1, P_1) \\ &= P_1(0)^2 + P_1(1)^2 + P_1(-1)^2 \\ &= 0^2 + 1^2 + 0^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

D'où $\|P_1\| = \sqrt{\|P_1\|^2} = 1$

Et

$$\begin{aligned}\|P_2\|^2 &= \varphi(P_2, P_2) \\ &= P_2(0)^2 + P_2(1)^2 + P_2(-1)^2 \\ &= 0^2 + 0^2 + 1^2 \\ &= 1\end{aligned}$$

D'où $\|P_2\| = \sqrt{\|P_2\|^2} = 1$.

Finalemment la famille (P_1, P_2) est une famille orthonormale.

(b) Soit $P = aX^2 + bX + c \in \text{Ker}(u)$, on a alors $2P'(0)X^2 - (P(1) + P(-1))X = 0$

Le polynôme $2P'(0)X^2 - (P(1) + P(-1))X$ est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, on a donc

$$\begin{aligned}\begin{cases} 2P'(0) &= 0 \\ P(1) + P(-1) &= 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2b &= 0 \\ a + b + c + a - b + c &= 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b &= 0 \\ a + c &= 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi

$$P = aX^2 + bX + c \in \text{Ker}(u) \Leftrightarrow P = a(X^2 - 1)$$

On a donc $\text{Ker}(u) = \text{Vect}(X^2 - 1)$. Le polynôme $X^2 - 1$ est non-nul, il forme donc une famille libre.

Ainsi $X^2 - 1$ est une base de $\text{Ker}(u)$.

(c) On va poser $P_3 = X^2 - 1$ et considérer la famille (P_1, P_2, P_3) .

On a $\|P_3\| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 0^2} = 1$. Ainsi P_3 est une base orthonormale de $\text{Ker}(u)$.

On a de plus

$$\varphi(P_1, P_3) = P_1(0)P_3(0) + P_1(1)P_3(1) + P_1(-1)P_3(-1) = 0 \times (-1) + 1 \times 0 + 0 \times 0 = 0$$

Et

$$\varphi(P_2, P_3) = P_2(0)P_3(0) + P_2(1)P_3(1) + P_2(-1)P_3(-1) = 0 \times (-1) + 0 \times 0 + 1 \times 0 = 0$$

La famille (P_1, P_2, P_3) est donc une famille orthonormale, elle est en particulier libre. C'est une famille orthonormale de cardinal 3 dans E qui est de dimension 3, c'est donc une base orthonormale de E .

Notons $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3)$. On a

$$u(P_1) = 2P_2, \quad u(P_2) = \frac{1}{2}u(u(P_1)) = \frac{1}{2}(-4P_1) = -2P_1, \quad u(P_3) = 0$$

Ainsi $\mathcal{B} = (\frac{1}{2}(X^2 + X), \frac{1}{2}(X^2 - X), X^2 - 1)$ est une base orthonormée de E et

la matrice associée à u dans la base \mathcal{B} est :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Partie II - Caractérisations des endomorphismes antisymétriques

1. Soit $(x, y) \in E^2$ on a

$$\langle u(x+y), x+y \rangle = \langle u(x) + u(y), x+y \rangle = \langle u(x), x \rangle + \langle u(y), y \rangle + \langle u(x), y \rangle + \langle u(y), x \rangle$$

Supposons que u soit un endomorphisme antisymétrique, on a alors, pour $(x, y) \in E^2$

$$0 = \langle u(x+y), x+y \rangle = \langle u(x), x \rangle + \langle u(y), y \rangle + \langle u(x), y \rangle + \langle u(y), x \rangle = 0 + 0 + \langle u(x), y \rangle + \langle u(y), x \rangle$$

D'où

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x), y \rangle = -\langle u(y), x \rangle = -\langle x, u(y) \rangle$$

Supposons désormais que

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle$$

Soit $x \in E$, on a alors

$$\langle u(x), x \rangle = -\langle x, u(x) \rangle = -\langle u(x), x \rangle$$

Ainsi

$$\forall x \in E, \quad \langle u(x), x \rangle = 0$$

u est donc antisymétrique

Finalement u est un endomorphisme antisymétrique si et seulement si :

$$\boxed{\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle}$$

2. (a) Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, d'après l'expression des coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée on a

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^n \langle u(e_j), e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^n \langle e_i, u(e_j) \rangle e_i$$

Ainsi, par définition de la matrice d'un endomorphisme, la matrice M de u dans la base \mathcal{B} vérifie

$$\boxed{\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad m_{i,j} = \langle e_i, u(e_j) \rangle}$$

- (b) Supposons dans un premier temps que u est un endomorphisme antisymétrique. On a alors, pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$

$$m_{i,j} = \langle e_i, u(e_j) \rangle = -\langle u(e_i), e_j \rangle = -\langle e_j, u(e_i) \rangle = -m_{j,i}$$

On a ainsi

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad m_{i,j} = -m_{j,i}$$

C'est-à-dire ${}^t M = -M$.

Supposons maintenant que ${}^t M = -M$. En d'autres termes on a

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad \langle e_i, u(e_j) \rangle = -\langle u(e_i), e_j \rangle$$

Soit $x \in E^2$, on a

$$\begin{aligned} \langle u(x), x \rangle &= \left\langle u \left(\sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i \right), \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle e_j \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle u(e_i), \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle e_j \right\rangle && \text{par linéarité de } u \\ &= \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle \left\langle u(e_i), \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle e_j \right\rangle && \text{par linéarité à gauche du produit scalaire} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle \langle x, e_i \rangle \langle u(e_i), e_j \rangle && \text{par linéarité à droite du produit scalaire} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle \langle x, e_i \rangle \times 0 && \text{par hypothèse} \\ &= 0 \end{aligned}$$

On a donc montré que

$$\forall x \in E, \quad \langle u(x), x \rangle = 0$$

u est donc antisymétrique.

Finalement on a montré que :

u est antisymétrique si et seulement si la matrice M associée à u dans la base \mathcal{B} vérifie ${}^t M = -M$.

Partie III - Propriétés générales des endomorphismes antisymétriques

1. Soit λ une valeur propre de u et $x \in E$ un vecteur propre associé, on a alors

$$\langle u(x), x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \lambda \|x\|^2$$

Or, comme u est antisymétrique, on a $\langle u(x), x \rangle = 0$.

Ainsi $\lambda \|x\|^2 = 0$. x est un vecteur propre, on a donc $x \neq 0_E$ et, par suite, $\|x\| \neq 0$. D'où $\lambda = 0$

Enfin, si λ est une valeur propre de u alors $\lambda = 0$.

2. Soit $x \in \text{Im}(u)$ et $y \in \text{Ker}(u)$. Il existe donc $z \in E$ tel que $x = u(z)$. On a alors

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \langle u(z), y \rangle \\ &= -\langle z, u(y) \rangle && \text{car } u \text{ antisymétrique} \\ &= -\langle z, 0 \rangle && \text{car } y \in \text{Ker}(u) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Im(u) et Ker(u) sont donc orthogonaux.

En particulier on a $\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u) = \{0_E\}$.

D'après le théorème du rang, on a $\dim(E) = \dim(\text{Im}(u)) + \dim(\text{Ker}(u))$, ainsi

Im(u) et Ker(u) sont supplémentaires (plus précisément Im(u) est le supplémentaire orthogonal de Ker(u) et vice-versa).

On va procéder par double inclusion

Soit $x \in \text{Ker}(u)$, on a alors

$$u(x) = u(u(x)) = u(0_E) = 0_E$$

Ainsi $x \in \text{Ker}(u^2)$, on a donc $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^2)$.

Soit maintenant $y \in \text{Ker}(u^2)$.

On a alors $u(y) \in \text{Im}(u)$ mais également $u(y) \in \text{Ker}(u)$ (puisque $u(u(y)) = u^2(y) = 0_E$).

Or $\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u) = \{0_E\}$, ainsi $u(y) = 0_E$ et donc $y \in \text{Ker}(u)$.

On a ainsi montré que $\text{Ker}(u^2) \subset \text{Ker}(u)$.

Enfin, on a bien Ker(u) = Ker(u^2).

3. Soit λ une valeur propre de u^2 et $x \in E$ un vecteur propre associé, on a alors

$$\langle u^2(x), x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle = \lambda \|x\|^2$$

Mais également, comme u est antisymétrique,

$$\langle u^2(x), x \rangle = -\langle u(x), u(x) \rangle = -\|u(x)\|^2$$

Ainsi $\lambda = -\frac{\|u(x)\|^2}{\|x\|^2} \leq 0$. ($\|x\| \neq 0$ car $x \neq 0_E$.)

On a donc montré que toute valeur propre de λ est négative ou nulle.

4. (a) Soit $(x, y) \in E^2$, on a alors

$$\langle u^2(x), y \rangle = -\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, u^2(y) \rangle$$

Ainsi u est un endomorphisme symétrique. En particulier u^2 est diagonalisable.

Supposons par l'absurde que u^2 n'admet pas de valeurs propres non-nulle. Comme u^2 est diagonalisable il admet des valeurs propres, 0 est donc la seule valeur propre de u^2 .

Puisque u^2 est diagonalisable et 0 est la seule valeur propre de u^2 alors $u^2 = 0_{\text{Id}}$.

On a donc $\text{Ker}(u^2) = E$.

Or $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2)$, ainsi $\text{Ker}(u) = E$. u est donc l'endomorphisme nul. Ceci est absurde car on a supposé que u n'était pas l'endomorphisme nul.

Enfin, u^2 admet au moins une valeur propre non-nulle (en particulier strictement négative d'après 3.).

- (b) Il nous faut montrer que F est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 et que F est stable par u .

La famille $(x, u(x))$ engendre F , montrons que c'en est une base.

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha x + \beta u(x) = 0_E$.

Alors en composant par u on a $\alpha u(x) + \beta u^2(x) = 0_E$, c'est-à-dire $\alpha u(x) + \lambda \beta x = 0_E$.

On a ainsi le système
$$\begin{cases} \alpha x + \beta u(x) = 0_E \\ \lambda \beta x + \alpha u(x) = 0_E \end{cases}$$

Supposons par l'absurde $\alpha \neq 0$ alors l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - \frac{\beta}{\alpha} L_2$ nous donne

$$\left(\alpha - \frac{\lambda \beta^2}{\alpha} \right) x = 0_E$$

Puisque $x \neq 0_E$ on a donc $\alpha - \frac{\lambda \beta^2}{\alpha} = 0$, c'est-à-dire $\alpha^2 = \lambda \beta^2$.

Or $\lambda < 0$, ainsi $\lambda \beta^2 \leq 0$ et donc $0 \leq \alpha^2 \leq 0$.

On a ainsi $\alpha = 0$. Ceci conclut notre raisonnement par l'absurde, l'hypothèse $\alpha \neq 0$ est absurde, on a donc bien $\alpha = 0$.

On en déduit alors via notre deuxième équation que $\lambda \beta x = 0_E$, d'où, comme $\lambda \neq 0$ et $x \neq 0_E$, $\beta = 0$.

Finalement $\alpha = \beta = 0$, la famille $(x, u(x))$ est libre. C'est donc une base de F .

On en déduit que $\dim(F) = 2$. F est bien un plan vectoriel de E .

Vérifions maintenant la stabilité.

Soit $y \in E$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $y = ax + bu(x)$.

Alors $u(y) = au(x) + bu^2(x) = au(x) + b\lambda x \in \text{Vect}(x, u(x)) = F$.

On a montré que

$$\forall y \in F, \quad u(y) \in F$$

En d'autres termes F est stable par u .

- (c) Soit $z \in F^\perp$. Montrer que $u(z) \in F^\perp$ revient à montrer que, pour tout $y \in F$, $\langle u(z), y \rangle = 0$.

Soit $y \in F$, on a alors $\langle u(z), y \rangle = -\langle z, u(y) \rangle$.

Or $u(y) \in F$ d'après la question précédente et $z \in F^\perp$, ainsi $\langle z, u(y) \rangle = 0$ et donc $\langle u(z), y \rangle = 0$.

Finalement $u(z) \in F^\perp$. F^\perp est bien stable par u .

- (d) Soit $x \in F^\perp$, on a

$$\langle u_1(x), x \rangle_1 = \langle u_1(x), x \rangle = \langle u(x), x \rangle = 0$$

Ainsi u_1 est bien un endomorphisme antisymétrique de F^\perp .

Soit $y \in \text{Im}(u)$, il existe alors $z \in E$ tel que $y = u(z)$.

Or $E = F \oplus F^\perp$, il existe alors $z_1 \in F$ et $z_2 \in F^\perp$ tels que $z = z_1 + z_2$.

D'où

$$y = u(z) = u(z_1) + u(z_2) = u(z_1) + u_1(z_2)$$

$u(z_1) \in F$ car $z_1 \in F$ et F est stable par u . $u_1(z_2) \in \text{Im}(u_1)$.

Ainsi on a montré que $\text{Im}(u) = F + \text{Im}(u_1)$.

Soit $a \in F$ et $b \in \text{Im}(u_1)$ alors $a \in F$ et $b \in F^\perp$, d'où $\langle a, b \rangle = 0$. Ainsi F et $\text{Im}(u_1)$ sont des sous-espaces vectoriels orthogonaux, ils sont donc en somme directe et ainsi

$$\text{Im}(u) = F \oplus \text{Im}(u_1)$$

5. On va procéder par récurrence double sur la dimension n de E .

Initialisation :

Si $n = 0$ alors $E = \{0_E\}$ et le seul endomorphisme de E est l'endomorphisme nul qui est de rang 0 donc de rang pair

On suppose ici $n = 1$. u est alors une application linéaire de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , u est donc de la forme $x \mapsto ax$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Puisque u est antisymétrique on a alors, pour $x \in \mathbb{R}$

$$0 = \langle u(x), x \rangle = ax \times x = ax^2$$

Ainsi $a = 0$, u est donc l'endomorphisme nul, en particulier $\text{Rang}(u) = 0$, le rang de u est donc bien pair.

Hérédité :

Soit $n \geq 2$. On suppose avoir montré que tout endomorphisme antisymétrique dans un espace euclidien de dimension $n - 2$ ou $n - 1$ est de rang pair.

On considère un espace euclidien E de dimension n et u un endomorphisme antisymétrique de E .

Si u est l'endomorphisme nul alors u est de rang 0 qui est bien un nombre pair.

Sinon soit x un vecteur propre de u^2 associé à une valeur propre non nulle et F le sous-espace vectoriel de E engendré par $(x, u(x))$.

Avec les notations de la question 4.d) on a alors $\text{Im}(u) = F \oplus \text{Im}(u_1)$. D'où

$$\text{Rang}(u) = \dim(\text{Im}(u)) = \dim(F) + \dim(\text{Im}(u_1)) = 2 + \text{Rang}(u_1)$$

u_1 est un endomorphisme antisymétrique de F^\perp et F^\perp est de dimension $n - 2$, ainsi, par hypothèse de récurrence $\text{Rang}(u_1)$ est pair et donc $\text{Rang}(u)$ est également pair.

On a ainsi montré que par récurrence que tout endomorphisme antisymétrique est de rang pair.

Partie IV - Application

1. La matrice de u dans la base orthonormale \mathcal{B} vérifie ${}^tA = -A$. D'après le critère de la question II2.b)

u est un endomorphisme antisymétrique.

On a

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^2(f_1)) &= \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^2)\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_1) \\ &= A^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -9 \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_1) \end{aligned}$$

Ainsi $u^2(f_1) = 9f_1$. Le vecteur $f_1 = e_1 + e_2 - e_3$ est vecteur propre de u^2 pour la valeur propre -9 .

2. $u(f_1) = 3e_1 - 3e_2 - 3e_4$.

On va déterminer une base orthonormale de F en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à la famille $(f_1, u(f_1))$.

La base (e_1, e_2, e_3, e_4) étant orthonormée, on a, d'après le théorème de Pythagore

$$\|f_1\|^2 = \|e_1\|^2 + \|e_2\|^2 + \|-e_3\|^2 = 3$$

Posons alors $g_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 - e_3)$

Calculons ensuite $u(f_1) - \langle u(f_1), g_1 \rangle g_1$.

On a

$$\langle u(f_1), g_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \langle u(f_1), f_1 \rangle = 0 \quad \text{car } u \text{ est antisymétrique}$$

D'où $u(f_1) - \langle u(f_1), g_1 \rangle g_1 = u(f_1)$.

D'après le théorème de Pythagore on a

$$\|u(f_1)\|^2 = 9 + 9 + 9 = 27$$

On pose alors $g_2 = \frac{u(f_1)}{\|u(f_1)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 - e_2 - e_4)$

La famille (g_1, g_2) est alors une base orthonormée de F .

Déterminons maintenant F^\perp .

Soit $x = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4 \in E$ où $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, on a

$$\begin{aligned} x \in F^\perp &\Leftrightarrow \begin{cases} \langle x, f_1 \rangle &= 0 \\ \langle x, u(f_1) \rangle &= 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b - c &= 0 \\ 3a - 3b - 3d &= 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b - c &= 0 \\ -2b + c - d &= 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a &= -b + c \\ d &= -2b + c \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = b(-e_1 + e_2 - 2e_4) + c(e_1 + e_3 + e_4) \end{aligned}$$

Ainsi $F^\perp = \text{Vect}(-e_1 + e_2 - 2e_4, e_1 + e_3 + e_4)$

Notons u_1 l'endomorphisme u restreint à F^\perp . u_1 est aussi un endomorphisme antisymétrique. On va chercher un vecteur propre de u_1^2 .

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $x = a(-e_1 + e_2 - 2e_4) + b(e_1 + e_3 + e_4) = (-a + b)e_1 + ae_2 + be_3 + (-2a + b)e_4$.

On a alors

$$\begin{aligned} u(x) &= 6ae_1 + (6a - 6b)e_2 + (12a - 6b)e_3 + 6be_4 \\ u^2(x) &= (36a - 36b)e_1 - 36ae_2 - 36be_3 + (72a - 36b)e_4 = -36x \end{aligned}$$

N'importe quel vecteur de F^\perp est un vecteur propre de u_1 pour la valeur propre -36 .

On va prendre pour f_3 un tel vecteur (relativement simple), par exemple $f_3 = e_2 + e_3 - e_4$.

On pose alors $g_3 = \frac{1}{\|f_3\|} f_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_2 + e_3 - e_4)$.

On prend ensuite

$$\begin{aligned} g_4 &= \frac{u(f_3) - \langle u(f_3), g_3 \rangle g_3}{\|u(f_3) - \langle u(f_3), g_3 \rangle g_3\|} \\ &= \frac{u(f_3)}{\|u(f_3)\|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{36 + 36 + 36}}(6e_1 + 6e_2 + 6e_4) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 + e_4) \end{aligned}$$

Alors, la famille (g_3, g_4) est une base orthonormée de F^\perp .

3. La famille $\mathcal{B}_0 = (g_1, g_2, g_3, g_4)$ est obtenue en concaténant une base orthonormée de F et une base orthonormée de F^\perp , c'est donc une base orthonormée de E

La famille $\mathcal{B}_0 = (g_1, g_2, g_3, g_4)$ est une base orthonormale de E .

On a

$$\begin{aligned} u(g_1) &= \frac{1}{\sqrt{3}}u(f_1) = \frac{1}{\sqrt{3}}2\sqrt{3}g_2 = 3g_2 \\ u(g_2) &= \frac{1}{3\sqrt{3}}u(u(f_1)) = \frac{1}{3\sqrt{3}}-9f_1 = -\frac{3}{\sqrt{3}}f_1 = -3g_1 \\ u(g_3) &= \frac{1}{\sqrt{3}}u(f_3) = \frac{1}{\sqrt{3}}6\sqrt{3}g_4 = 6g_4 \\ u(g_4) &= \frac{1}{6\sqrt{3}}u(u(g_1)) = \frac{1}{6\sqrt{3}}-36f_1 = -\frac{6}{\sqrt{3}}f_3 = -6g_3 \end{aligned}$$

Ainsi la matrice associée à u relativement à \mathcal{B}_0 est

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$