# Révisions - Analyse

## Exercice 1 - Ecricome ECS 2018 - Exercice 2 ⋆

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

et on note $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2 - 6y.$$

On pose enfin $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1. Vérifier que $\varphi > 1$ et que les réels $\varphi$ et $\frac{-1}{\varphi}$ sont les solutions de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.
2. (a) Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que les seuls points critiques de $f$ sont $(\varphi, \varphi+1)$ et $\left(-\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi+1}\right)$.
   (c) Étudier la nature des points critiques de $f$.
3. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ : $u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$.
4. (a) Recopier et compléter la fonction **Python** suivante afin que, prenant en argument un entier $n \geq 2$, elle calculer et renvoie la valeur du terme $u_n$ de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

```python
def suite(n):
    v = 0
    w = 1
    for k in range(2,n+1):
      ...
      ...
      ...
    return ...
```

   (b) Justifier qu'il existe des réels $\lambda$ et $\mu$ que l'on déterminera, tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda \varphi^n + \mu \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^n.$$

   (c) En déduire que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geq 1}$ converge et déterminer sa limite.
5. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}$.
   (a) Montrer, sans chercher à calculer de somme, que la série de terme général $\frac{1}{u_n u_{n+1}}$ converge.
   (b) En déduire que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ converge.
   (c) En utilisant le résultat de la question 3, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ :

$$S_{n+1} - S_n = \frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}.$$

   (d) Montrer que : $\varphi = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}$.

## Problème 2 - EML ECS 2017 - Problème 2 ⋆⋆⋆

On définit la fonction réelle $H$ d'une variable réelle $x$ par $H(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x} dt$.
Dans tout le problème, $I$ désigne l'intervalle $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

**Partie I - Premières propriétés de la fonction $H$.**

1. Justifier que la fonction $H$ est définie sur $I$.

2. Montrer que $H$ est décroissante sur $I$.
3. (a) Calculer $H(1)$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties : $H(n) = 2n(H(n) - H(n+1))$.
   En déduire une expression de $H(n+1)$ en fonction de $n$ et de $H(n)$.
   (c) Écrire un programme en `Python` qui, étant donné un entier $n$ de $\mathbb{N}^\star$, renvoie la valeur de $H(n)$.
   (d) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ H(n) = \frac{(2n-2)!\pi}{2^{2n-1}((n-1)!)^2}$.

**Partie II - Étude de $H(x)$ lorsque $x$ tend vers $\frac{1}{2}$.**

4. (a) Montrer que la fonction $\varphi : u \mapsto \frac{\mathrm{e}^u - \mathrm{e}^{-u}}{2}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
   Préciser $\varphi^{-1}(0)$ et $\lim_{t\to+\infty} \varphi^{-1}(t)$.
   (b) À l'aide du changement de variable $t = \varphi(u)$, montrer :
$$\forall x \in I,\ H(x) = \frac{4^x}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u})^{2x-1}}\mathrm{d}u.$$
5. (a) Justifier : $\forall u \in [0, +\infty[,\ \mathrm{e}^u \leq \mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u} \leq 2\mathrm{e}^u$.
   (b) En déduire : $\forall x \in I,\ \frac{1}{2x-1} \leq H(x) \leq \frac{4^x}{2(2x-1)}$.
6. Déterminer la limite de $H$ en $\frac{1}{2}$ et un équivalent simple de $H(x)$ lorsque $x$ tend vers $\frac{1}{2}$.

**Partie III - Étude de $H(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.**

7. (a) Montrer : $\forall u \in [0, 1],\ \ln(1+u) \geq \frac{u}{2}$.
   (b) À l'aide d'une loi normale bien choisie, montrer que, pour tout $x$ de $I$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt^2/2}\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.
   (c) En déduire : $\forall x \in I,\ 0 \leq \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^x}\mathrm{d}t \leq \int_0^1 \mathrm{e}^{-xt^2/2}\mathrm{d}t \leq \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$.
   (d) Montrer : $\forall x \in I,\ 0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{2x-1}$.
   (e) En déduire la limite de $H$ en $+\infty$.
8. On note, pour tout $n$ de $\mathbb{N}^\star$, $u_n = \ln(H(n)) + \frac{\ln(n)}{2}$.
   (a) Déterminer un équivalent simple de $u_{n+1} - u_n$ lorsque l'entier $n$ tend vers $+\infty$. On pourra utiliser le résultat obtenu à la question 3b.
   (b) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1}(u_{n+1} - u_n)$ converge.
   (c) En déduire l'existence d'un réel $K$ strictement positif tel que : $H(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{n}}$.
9. Donner enfin un équivalent simple de $H(x)$ lorsque le réel $x$ tend vers $+\infty$ à l'aide de $K$.

**Partie IV - Étude d'une suite de variables aléatoires.**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{2}{\pi(1+t^2)} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$.

10. Montrer que $f$ est une densité.
11. On considère une variable aléatoire réelle $X$ à densité, de densité $f$.
    (a) Déterminer la fonction de répartition $F_X$ de $X$.
    (b) La variable $X$ admet-elle une espérance ? Une variance ?
12. On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ à densité, à valeurs strictement positives, mutuellement indépendantes, dont chacune a pour densité $f$.
    On définit, pour tout $n$ de $\mathbb{N}^\star$, les variables aléatoires $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $Z_n = \frac{n}{M_n}$.
    (a) Déterminer, pour tout $n$ de $\mathbb{N}^\star$, la fonction de répartition $F_{M_n}$ de $M_n$.
    (b) Justifier : $\forall u \in ]0, +\infty[, \arctan(u) + \arctan\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{\pi}{2}$ et $\arctan(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$.
    (c) Montrer alors, pour tout $n$ de $\mathbb{N}^\star$ : $\forall x \in ]0, +\infty[,\ P(Z_n \leq x) = 1 - \left(1 - \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n$.
    (d) En déduire que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité dont on reconnaîtra la loi.

## Exercice 3 - ESC ECS 2007 - Exercice 2 ⋆

On pose pour tout entier naturel $n$ non nul, $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n} \mathrm{d}x$ et $J_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^3)^n} \mathrm{d}x$.

1. Prouver la convergence de l'intégrale impropre appelée $I_n$.
2. Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est décroissante et converge vers une limite notée $\ell$.
3. On pose, pour tout réel $A > 0$ et tout entier naturel $n$ non nul : $I_n(A) = \int_0^A \frac{1}{(1+x^3)^n} \mathrm{d}x$.
   Par une intégration par parties, montrer que $I_n(A) = \frac{A}{(1+A^3)^n} + 3n(I_n(A) - I_{n+1}(A))$.
4. Dans cette question on montre que la limite de $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, notée $\ell$ est nulle.
   (a) À l'aide de la question 3, montrer que : $\frac{J_n}{3n} = \frac{1}{3n\cdot 2^n} + (J_n - J_{n+1})$.
   (b) Justifier que les séries de terme général $(J_n - J_{n+1})$ et $\frac{1}{3n\cdot 2^n}$ sont convergentes.
   En déduire la nature de la série de terme général $\frac{J_n}{3n}$.
   (c) Soit $\beta$ un réel non nul et $(a_n)$ une suite équivalente à $\left(\frac{\beta}{3n}\right)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.
   Justifier que la série de terme général $a_n$ diverge et en déduire par l'absurde que $\ell = 0$.
5. (a) Montrer que pour tout entier naturel $n$ non nul, $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^3)^n} \leq \frac{1}{3n-1}$.
   (b) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
6. (a) Grâce à la question 3, montrer que pour tout entier naturel $n$ non nul : $I_{n+1} = \frac{3n-1}{3n} I_n$.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 2, $I_n = I_1 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{3k-1}{3k}$.
7. On admet que $I_1 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.
   Compléter la fonction `Python` suivant pour qu'elle prenne un entier supérieur à 2 en paramètre et calcule et renvoie la valeur de $I_n$ trouvée à la question 6b :

```python
def integrale(n):
  I = ...
  for k in range(1,n):
    I = ...
  return I
```