Révisions - Probabilités discrètes

Problème 1 - Ecricome ECS 2020 - Problème

On étudie dans ce problème un processus temporel de comptage appelé **processus de Poisson**.
L'objectif de ce problème est d'étudier ce processus en partant de deux définitions différentes, qui se révèleront être équivalentes.
Les deux parties de ce problème sont indépendantes.

Partie I - Définition par X_1, X_2, ..., X_n.

On considère dans cette partie une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, mutuellement indépendantes et identiquement distribuées selon une loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^\star$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k,$$

avec la convention $S_0 = 0$.
Enfin, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^\star$, on note N_t la variable aléatoire égale à la plus grande valeur de n pour laquelle S_n est inférieure ou égal à t, c'est-à-dire :

$$N_t = \sup\{n \in \mathbb{N},\ S_n \leq t\}.$$

Par convention, si l'ensemble écrit ci-dessus n'est pas fini, on pose $N_t = -1$.

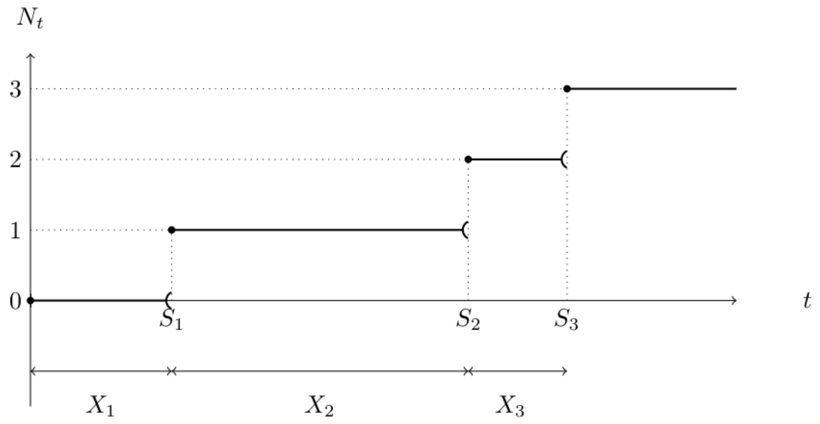


Figure 1 – Exemple de réalisation de N_t en fonction de t.

1. Pour tout réel t strictement positif, montrer que : $P(N_t = 0) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.
2. Montrer qu'une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ si et seulement si λX suit la loi γ de paramètre 1.
3. Pour tout entier n non nul, en déduire une densité de la variable aléatoire λS_n.
4. Pour tout réel t strictement positif et pour tout entier naturel n, comparer les événements $[N_t \geq n]$ et $[S_n \leq t]$.
5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et $t \in \mathbb{R}_+$:

$$P(N_t = n) = \int_0^{\lambda t} \frac{u^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u - \int_0^{\lambda t} \frac{u^n}{n!}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u.$$

6. En intégrant par parties une des intégrales ci-dessus, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ P(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

   Quelle est la loi de N_t ?

7. On rappelle que l'instruction Python `rd.exponential(1/mu,n)` renvoie un tableau à n éléments dont les coefficients sont des réalisations de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre `mu`.

   On rappelle également que l'instruction Python `plt.plot(x,y)` effectue un tracé qui relie les points (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) si `x = np.array(`$[x_1, x_2, \ldots, x_n]$`)` et `y = np.array(`$[y_1, y_2, \ldots, y_n]$`)` sont deux tableaux de même taille.

   (a) Écrire une fonction d'en-tête **def** `simulation_S(n,mu):` renvoyant une réalisation de S_n (avec $\lambda =$`mu`).

   (b) Écrire une fonction d'en-tête **def** `simulation_N(t,mu):` renvoyant une réalisation de N_t (avec $\lambda =$`mu`).

   (c) On a commencé à écrire une fonction `evolution_S` renvoyant toutes les valeurs $S_1, S_2, \ldots, S_n$ tant que $S_n \leq t$. Compléter cette fonction.

```python
def evolution_S(t,mu):
  L = np.array([])
  S = rd.exponential(1/mu)
  while ... :
    # np.append ajoute un element a la fin du tableau
    L = np.append(L,S)
    S = S + ...
  return L
```

   (d) On a commencé à écrire un script Python ci-dessous. Dans ce script, on note `S = [`$S_1, \ldots, S_n$`]` et on souhaite tracer l'évolution de N_t du temps 0 au temps S_n de la même manière que sur la figure 1.

```python
def trace_N(t,mu):
  S = evolution_S(t,mu)
  n = len(S)
  plt.plot([0,S[0]],[0,0])
  for i in range(1,n):
    ...
```

   Par laquelle des instructions suivantes faut-il compélter la ligne manquante ?

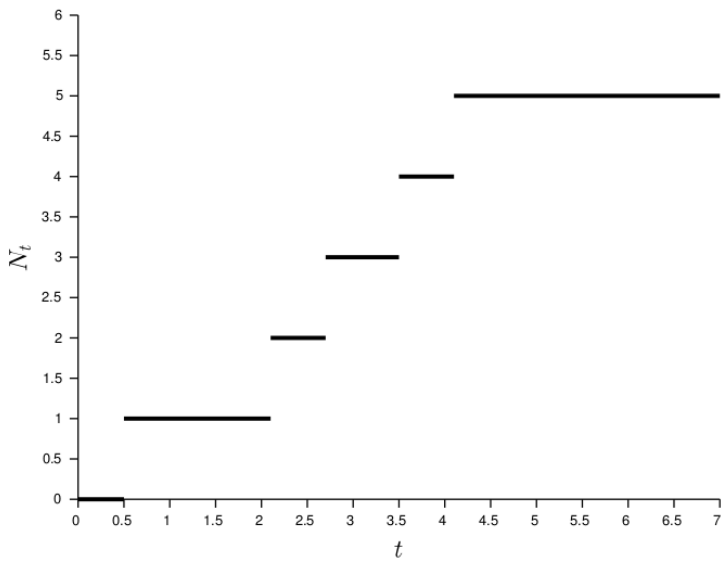
   i. `plot([S[i−1],S[i]],[i,i])`

   ii. `plot([i,i+1],[S[i−1],S[i]])`

   iii. `plot([S[i−2],S[i−1]],[i,i])`

   iv. `plot([i,S[i]],[i,i])`

   (e) Un étudiant exécute le script précédent pour `t = 7` et `mu = 1`. On obtient la figure suivante :



   Que valent dans ce cas $N_{3,2}$ et $N_{5,5}$?

   Donner une valeur approximative de S_2 et de X_4.

Partie II - Définition par $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$
On rappele que les parties de ce problème sont indépendantes.
Dans cette partie, on définit une famille de variables aléatoires $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- (H_1) : $N_0 = 0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $N_t(\Omega) \subset \mathbb{N}$;
- (H_2) : pour tout $t > 0$, $P(N_t = 0) < 1$;
- (H_3) : pour tous réels $h \geq 0$ et $t \geq 0$, la variable aléatoire $N_{t+h} - N_t$ est indépendante de la variable aléatoire N_t ; de plus, $N_{t+h} - N_t$ et N_h ont la même loi ;
- (H_4) : $P(N_h \geq 2) = o(h)$ lorsque h tend vers 0 par valeurs positives.

Enfin pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$, on note :

$$p_n(t) = P(N_t = n).$$

8. Propriétés élémentaires.
   (a) Que vaut $p_0(0)$?
   (b) Montrer que le processus est croissante, c'est-à-dire que pour tous $t, h \in \mathbb{R}_+$:
   $$P(N_{t+h} - N_t \geq 0) = 1.$$
9. Détermination de p_0.
   (a) En écrivant $N_{t+h} = N_t + (N_{t+h} - N_t)$, montrer que pour tout $t, h \in \mathbb{R}_+$:
   $$p_0(t+h) = p_0(t)p_0(h).$$
   (b) En déduire que la fonction p_0 est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
   (c) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{R}_+$:
   $$p_0(ns) = (p_0(s))^n.$$
   En déduire que pour tous $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$:
   $$p_0\left(\frac{m}{n}\right) = (p_0(1))^{m/n}.$$
   On pourra poser $s = \frac{m}{n}$ et utiliser le début de la question.
   (d) Soit $t \in \mathbb{R}_+^\star$. On admet qu'il existe deux suites (u_n), (v_n) de nombres rationnels telles que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq t \leq v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = t.$$
   Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que $p_0(1) = \mathrm{e}^{-\lambda}$. Montrer que :
   $$p_0(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$
10. Loi de N_t.
    Par la suite, $n \in \mathbb{N}^\star$, $t \in \mathbb{R}_+$ et $h \in \mathbb{R}_+^\star$.
    (a) Donner le développement limité à l'ordre 1 de $p_0(h)$ lorsque h tend vers 0.
    (b) Après avoir justifié que $([N_h = 0], [N_h = 1], [N_h \geq 2])$* est un système complet d'événements, montrer que :
    $$p_1(h) = \lambda h + \underset{h\to0}{o}(h).$$
    (c) En écrivant $N_{t+h} = N_h + (N_{t+h} - N_h)$ et en utilisant le système complet d'événements introduit précédemment, montrer que :
    $$p_n(t+h) = p_0(h)p_n(t) + p_1(h)p_{n-1}(t) + \underset{h\to0}{o}(h).$$

(d) Déduire de cette dernière égalité que :

$$\frac{p_n(t+h)-p_n(t)}{h} = \lambda(p_{n-1}(t)-p_n(t)) + \underset{h\to 0}{o}(1).$$

En déduire que p_n est dérivable en t et donner l'expression de $p_n'(t)$.

(e) Pour tous n de $\mathbb{N}$ et t de $\mathbb{R}_+$, on pose $q_n(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} p_n(t)$.
Justifier la dérivabilité de q_n puis montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall t \in \mathbb{R}_+,\ q_n'(t) = \lambda q_{n-1}(t).$$

(f) Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ q_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

(g) Quelle est la loi de N_t ?

11. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note S_n le premier instant t où N_t vaut n, c'est-à-dire :

$$S_n = \inf\{t \in \mathbb{R}_+,\ N_t = n\}.$$

(a) Que vaut S_0 ? On le justifiera en revenant précisément à la définition donnée.

(b) Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Exprimer l'événement $[S_1 > t]$ en fonction de N_t.

(c) En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$P(S_1 \leq t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

(d) Reconnaître la loi de S_1.

(e) Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ N_t = \sup\{n \in \mathbb{N} \mid S_n \leq t\}.$$