Corrigé Partiel - Applications Réduction Matrices

1 Calcul de la puissance n^{e} d'une matrice

Exercice 1 - Calcul d'une puissance via le binôme de Newton

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On cherche à calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
On peut remarquer que :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons $A = I_3 + N$. Cette décomposition est intéressante pour deux raisons. D'abord, la matrice identité I_3 commute avec toutes les matrices et donc en particulier avec N. Donc les hypothèses pour appliquer le binôme de Newton sont réunies.
Ensuite, N est une matrice *nilpotente*, c'est-à-dire qu'il existe une puissance k telle que $N^k = 0$. En effet :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

puis :

$$N^3 = N^2 \times N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En fait, toutes les matrices triangulaires supérieures de diagonale nulle sont nilpotentes [1]. Cela signifie, en ce qui nous concerne, que les calculs de puissance vont être plus faciles et donc le calcul du binôme de Newton devrait bien se passer.
On a donc pour $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = (I_3 + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I_3^{n-k} N^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k.$$

Or pour $k \geqslant 3$, $N^k = 0$. La somme contient donc au plus 3 termes.
Attention cependant, la somme peut contenir moins de 3 termes si $n < 2$. Distinguons donc les cas :

- Si $n \geqslant 2$, alors :

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} N^k \\ &= \binom{n}{0} I_3 + \binom{n}{1} N + \binom{n}{2} N^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1. Attention, ce résultat n'est pas au programme, mais ça vous permettra de vous guider dans votre résolution. Attention également, la réciproque est fausse : il existe des matrices nilpotentes qui ne sont pas triangulaires supérieures.

- Si $n = 1$, alors :

$$A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mais on remarque que la formule précédente s'applique quand même[2]. On a donc encore :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Si $n = 0$, alors :

$$A^0 = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Et la formule précédente s'applique encore. On a bien :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans tous les cas, on a :

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Exercice 2 - Calcul d'une puissance via le binôme de Newton

Soient a et b deux réels avec $b \neq 0$. On pose :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \end{pmatrix}.$$

1. Cherchons deux réels x et y tels que $M = xN + yI_4$.
   On voit assez rapidement que I_4 n'a des termes que sur la diagonale. Ainsi, le seul moyen d'obtenir les bons termes hors-diagonaux est de fixer $x = 1$.
   Une fois cela choisit, les termes diagonaux de $xN + yI_4$ seront $b + y$ et on veut que cela fasse a. On pose donc $y = a - b$. On a alors :

$$\boxed{xN + yI_4 = N + (a-b)I_4 = \begin{pmatrix} b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \end{pmatrix} + (a-b)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix} = M.}$$

2. Ainsi la fonction suivante renvoie la matrice M :

```python
def matriceM(a,b):
    return b*np.ones([4,4]) - (b-a)*np.eye(4)
```

   En effet, `np.ones` renvoie une matrice remplie de 1 et non de b. Il faut donc multiplier par b pour trouver N. Et pour le second terme, il faut faire attention au signe $-$ qui précède.

2. Ce n'est pas complètement un hasard, mais une rédaction simple qui reste rigoureuse nécessite de distinguer les cas $n < 2$.

3. On a :

$$\begin{aligned} N^2 &= \begin{pmatrix} b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4b^2 & 4b^2 & 4b^2 & 4b^2 \\ 4b^2 & 4b^2 & 4b^2 & 4b^2 \\ 4b^2 & 4b^2 & 4b^2 & 4b^2 \\ 4b^2 & 4b^2 & 4b^2 & 4b^2 \end{pmatrix} = \boxed{4bN.} \end{aligned}$$

Si on calculait N^3, on aurait alors :

$$N^3 = N^2 \times N = 4bN \times N = 4bN^2 = 4b(4bN) = (4b)^2 N.$$

Et à chaque fois, on s'attend à ce qu'un nouveau facteur $4b$ sorte. On peut donc faire la conjecture pour $k \geqslant 1$:

$$N^k = (4b)^{k-1} N.$$

Montrons-le par récurrence :

- **Initialisation :** Pour $k = 1$, on a :

$$(4b)^{k-1} N = (4b)^0 N = 1 \times N = N.$$

  Donc la propriété est vérifiée.
- **Hérédité :** Soit $k \geqslant 1$. On suppose que $N^k = (4b)^{k-1} N$. Calculons N^{k+1}.
  On a :

$$\begin{aligned} N^{k+1} &= N^k \times N \\ &= (4b)^{k-1} N \times N \\ &= (4b)^{k-1} N^2 \\ &= (4b)^{k-1} (4b) N \\ &= (4b)^{(k+1)-1} N. \end{aligned}$$

  Et donc la propriété est héréditaire.

Ainsi par principe de récurrence, pour tout $k \geqslant 1$, on a bien :

$$\boxed{N^k = (4b)^{k-1} N.}$$

4. $(a-b)I_4$ est une matrice scalaire et commute avec toute matrice. En particulier N et $(a-b)I_4$ commutent.

Ainsi, on peut appliquer la formule du binôme de Newton au calcul suivant pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
M^n &= (N + (a-b)I_4)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k((a-b)I_4)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a-b)^{n-k} N^k \\
&= \binom{n}{0} (a-b)^n I_4 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (a-b)^{n-k} N^k \\
& \text{on sépare le premier terme de la somme car la formule sur } N^k \text{ ne s'applique que pour } k \geqslant 1 \\
& \text{on suit alors la convention que la seconde somme n'a aucun terme si } n = 0 \\
&= (a-b)^n I_4 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (a-b)^{n-k} (4b)^{k-1} N \\
&= (a-b)^n I_4 + \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a-b)^{n-k} (4b)^k - \binom{n}{0} (a-b)^n \right) \frac{1}{4b} N \\
& \text{on factorise et on fait réapparaître un premier terme pour retrouver un binôme de Newton} \\
&= (a-b)^n I_4 + ((a-b+4b)^n - (a-b)^n) \frac{1}{4b} N \\
&= \boxed{(a-b)^n I_4 + \frac{1}{4b} ((a+3b)^n - (a-b)^n) N.}
\end{aligned}$$

Exercice 3 - Calcul d'une puissance via un polynôme annulateur et une division euclidienne

Soit $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. On a :

$$U^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Et donc :

$$U^2 - 2U - 3I_4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $\boxed{x^2 - 2x - 3 \text{ est bien un polynôme annulateur de } U.}$

2. Admettons un instant le résultat et supposons qu'il existe Q_n, α_n et β_n tels que :

$$x^n = (x^2 - 2x - 3)Q_n(x) + \alpha_n x + \beta_n.$$

Une telle écriture est la **division euclidienne** de x^n par $(x^2 - 2x - 3)$. Q_n est alors le quotient de la division euclidienne et $\alpha_n x + \beta_n$ est le reste d'une telle division.

Ça fonctionne comme la division euclidienne de quand on était petit. On a un dividende (ici x^n), un diviseur (ici $x^2 - 2x - 3$), un quotient (ici Q_n) et un reste (ici $\alpha_n x + \beta_n$) parce que la division ne tombe pas forcément juste. Quand on était petit la règle était que le reste devait être strictement plus petit que le diviseur. Ici, le reste doit avoir un degré strictement plus petit que celui du diviseur.

La division euclidienne est *techniquement* au programme de première année, mais je doute que vous en ayez fait beaucoup.

Voyons maintenant comment aborder cette question. Le moyen le plus élégant est de procéder par **analyse-synthèse**. C'est une forme de raisonnement particulier. Dans un raisonnement par analyse-synthèse, on commence par supposer que le résultat existe et sous condition d'existence, on cherche à voir à quoi il peut ressembler. Une fois qu'on a déterminé quelle forme le résultat peut avoir, on utilise cette forme conjecturée pour établir l'existence.

Voyons dans notre cas ce qu'il se passe :

- **Analyse :** on suppose qu'il existe Q_n, α_n et β_n tels que :

$$x^n = (x^2 - 2x - 3)Q_n(x) + \alpha_n x + \beta_n.$$

Que peut-on dire sur Q_n, α_n et β_n ?

La partie compliquée de l'équation est $(x^2 - 2x - 3)Q_n(x)$ et il serait bien de la simplifier. Remarquons que -1 est racine évidente de $x^2 - 2x - 3$. On peut donc factoriser :

$$x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$$

Ainsi -1 et 3 sont les racines de $x^2 - 2x - 3$. C'est intéressant car si on évalue l'équation de la division en -1 et en 3, on va alors faire disparaître le terme problématique.

En -1, on a :

$$(-1)^n = ((-1)^2 - 2(-1) - 3)Q_n(-1) + \alpha_n(-1) + \beta_n$$

qui se simplifie en :

$$(-1)^n = -\alpha_n + \beta_n.$$

Et en 3, on a :

$$3^n = (3^2 - 2\times 3 - 3)Q_n(3) + \alpha_n \times 3 + \beta_n$$

qui se simplifie en :

$$3^n = 3\alpha_n + \beta_n.$$

On peut donc résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} (-1)^n & = & -\alpha_n + \beta_n \\ 3^n & = & 3\alpha_n + \beta_n \end{array}\right.$$
$$\underset{L_2 \leftarrow L2 + 3L_1}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} (-1)^n & = & -\alpha_n + \beta_n \\ 3^n + 3(-1)^n & = & 4\beta_n \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} (-1)^n & = & -\alpha_n + \beta_n \\ \beta_n & = & \frac{3^n + 3(-1)^n}{4} \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \alpha_n & = & \frac{3^n - (-1)^n}{4} \\ \beta_n & = & \frac{3^n + 3(-1)^n}{4} \end{array}\right.$$

Donc si Q_n, α_n et β_n existent alors nécessairement :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} \alpha_n & = & \frac{3^n - (-1)^n}{4} \\ \beta_n & = & \frac{3^n + 3(-1)^n}{4} \end{array}\right.}$$

Ce résultat est doublement intéressant. D'abord, il va nous permettre de conclure quant à l'existence. Ensuite, c'est la formule de α_n et β_n qui sera utile pour la question suivante.

On pourrait continuer et prouver qu'un seul Q_n est possible, mais ce n'est pas utile pour la question ou pour la suite. Donc passons à la synthèse.

- **Synthèse :** on ne suppose plus que Q_n, α_n ou β_n existent. On va désormais le prouver.

Posons :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha_n & = & \frac{3^n - (-1)^n}{4} \\ \beta_n & = & \frac{3^n + 3(-1)^n}{4} \end{array}\right.$$

Cette définition ne vient pas de nulle part : c'est le résultat de notre analyse. Montrons alors qu'il existe Q_n tel que :

$$x^n = (x^2 - 2x - 3)Q_n(x) + \alpha_n x + \beta_n.$$

Cela revient à dire qu'il existe Q_n tel que :

$$x^n - \alpha_n x + \beta_n = (x^2 - 2x - 3)Q_n(x).$$

Mais dire que cela, c'est dire que $x^n - \alpha_n x + \beta_n$ est factorisable par $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$. Donc cela revient à dire que $x^n - \alpha_n x + \beta_n$ admet -1 et 3 comme racines.

Vérifions-le. D'une part :

$$\begin{aligned}(-1)^n - \frac{3^n - (-1)^n}{4}(-1) - \frac{3^n + 3(-1)^n}{4} &= \frac{4(-1)^n}{4} + \frac{3^n - (-1)^n}{4} + \frac{-3^n - 3(-1)^n}{4} \\ &= \frac{(4-1-3)(-1)^n + (1-1)3^n}{4} = 0.\end{aligned}$$

Et d'autre part :

$$\begin{aligned}3^n - \frac{3^n - (-1)^n}{4} \times 3 - \frac{3^n + 3(-1)^n}{4} &= \frac{4 \times 3^n}{4} + \frac{-3 \times 3^n + 3 \times (-1)^n}{4} + \frac{-3^n - 3(-1)^n}{4} \\ &= \frac{(3-3)(-1)^n + (4-3-1)3^n}{4} = 0.\end{aligned}$$

Donc $x^n - \alpha_n x + \beta_n$ s'annule en -1 et en 3 et donc est factorisable par $(x+1)(x-3) = x^2 - 2x - 3$. Donc il existe Q_n tel que :

$$\boxed{x^n = (x^2 - 2x - 3)Q_n(x) + \alpha_n x + \beta_n.}$$

Par analyse-synthèse, on vient de montrer qu'il existe Q_n, α_n et β_n tels que :

$$\boxed{x^n = (x^2 - 2x - 3)Q_n(x) + \alpha_n x + \beta_n.}$$

De plus, dans un tel cas, on a nécessairement :

$$\boxed{\begin{cases} \alpha_n &= \frac{3^n - (-1)^n}{4} \\ \beta_n &= \frac{3^n + 3(-1)^n}{4} \end{cases}}$$

Que faut-il retenir ? Idéalement tout, mais la technique la plus importante à retenir de ce passage est l'idée d'aller évaluer aux racines de $x^2 - 2x - 3$ pour simplifier l'équation. Si vous savez faire cela, en déduire les équations sur α_n et β_n et les résoudre, vous aurez des points.

3. On en déduit que pour $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$U^n = (U^2 - 2U - 3I_4)Q_n(U) + \alpha_n U + \beta_n I_4.$$

Or $x^2 - 2x - 3$ est annulateur de U. Donc $U^2 - 2U - 3I_4 = 0$. Ainsi :

$$U^n = \alpha_n U + \beta_n I_4.$$

Avec les formules précédentes, on trouve donc :

$$\boxed{U^n = \frac{3^n - (-1)^n}{4} U + \frac{3^n + 3(-1)^n}{4} I_4 = \begin{pmatrix} \frac{3^n+3(-1)^n}{4} & \frac{3^n-(-1)^n}{4} & \frac{3^n-(-1)^n}{4} & \frac{3^n-(-1)^n}{4} \\ \frac{3^n-(-1)^n}{4} & \frac{3^n+3(-1)^n}{4} & \frac{3^n-(-1)^n}{4} & \frac{3^n-(-1)^n}{4} \\ \frac{3^n-(-1)^n}{4} & \frac{3^n-(-1)^n}{4} & \frac{3^n+3(-1)^n}{4} & \frac{3^n-(-1)^n}{4} \\ \frac{3^n-(-1)^n}{4} & \frac{3^n-(-1)^n}{4} & \frac{3^n-(-1)^n}{4} & \frac{3^n+3(-1)^n}{4} \end{pmatrix}.}$$

Exercice 4 - Calcul d'une puissance via la diagonalisation

On considère :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$ puisqu'elle est symétrique.
2. Les colonnes de A sont identiques et non nulles, donc $\text{rg}(A) = 1 < 3$. Et ainsi $\boxed{A \text{ n'est pas inversible.}}$
   Comme A n'est pas inversible, on a $A - 0I_3$ n'est pas inversible et donc :
$$\boxed{0 \in \text{Sp}(A).}$$
3. On a :
$$\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3A.}$$
   Donc $\boxed{x^2 - 3x \text{ est annulateur de } A.}$
4. Les racines de $x^2 - 3x$ sont 0 et 3. Donc :
$$\boxed{\text{Sp}(A) \subset \{0, 3\}.}$$
   On sait déjà qu'effectivement 0 est valeur propre. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :
$$\begin{aligned} X \in E_0(A) &\Leftrightarrow AX = 0 \times X \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x + y + z = 0 \\ &\Leftrightarrow z = -x - y \\ &\Leftrightarrow X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow X \in \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$
   D'où :
$$\boxed{E_0(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).}$$

Pour 3, on ne sait pas encore si c'est une valeur propre [3]. On va donc résoudre [4] :

$$\begin{aligned}
AX = 3 \times X \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 3x \\ x+y+z &=& 3y \\ x+y+z &=& 3z \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} -2x+y+z &=& 0 \\ x-2y+z &=& 0 \\ x+y-2z &=& 0 \end{array}\right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow L_1+L_2+L_3}{\Leftrightarrow} \quad \left\{\begin{array}{rcl} -2x+y+z &=& 0 \\ x-2y+z &=& 0 \\ 0 &=& 0 \end{array}\right. \\
& \underset{L_2 \leftarrow 2L_2+L_1}{\Leftrightarrow} \quad \left\{\begin{array}{rcl} -2x+y+z &=& 0 \\ -3y+3z &=& 0 \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} -2x+y+z &=& 0 \\ y &=& z \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} -2x+2z &=& 0 \\ y &=& z \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} x &=& z \\ y &=& z \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow \quad X = z\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi comme il y a une solution non triviale, $\boxed{\text{3 est bien valeur propre.}}$ De plus :

$$\boxed{E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right).}$$

5. (a) D'après la réponse précédente, $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $E_3(A)$. Comme c'est une famille d'un unique vecteur non nul, c'est une famille libre et donc une base de $E_3(A)$.

De même, $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$ est une famille de deux vecteurs non colinéaires et donc libre. C'est ainsi une base de $E_0(A)$ pour les mêmes raisons.

Ainsi $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est la concaténation de familles libres de sous-espaces propres distincts.

C'est donc une famille libre. Et comme card $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = 3 = \dim \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, c'est une base. Et elle est constituée de vecteurs propres.

3. On peut le savoir rapidement puisque $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

4. Comme on ne sait pas si 3 n'est pas valeur propre, on ne parle pas de $E_3(A)$. En effet, on ne sait pas si un tel sous-espace propre existe pour l'instant !

Ainsi d'après la formule de changement de base, on a :

$$\boxed{A = PDP^{-1}}$$

où $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.}$

(b) P est la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres. Ainsi P^{-1} est la matrice de passage de la base de vecteurs propres à la base canonique. Ces colonnes sont donc les coordonnées de la base canonique dans la base de vecteurs propres.

Pour inverser, le plus simple est encore de passer par la méthode de Gauss-Jordan :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow \frac{1}{3} L_3}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_3}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

(c) Montrons par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$.

- **Initialisation :** On a $A^0 = I_3$ et $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$.
  Donc on a bien $\boxed{A^0 = PD^0P^{-1}.}$
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $A^n = PD^nP^{-1}$.
  On a :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} \\ &= PD^nDP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

  La propriété est donc héréditaire.

Ainsi, d'après le principe de récurrence, on a $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N} : A^n = PD^nP^{-1}.}$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^n \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Là, si $n = 0$, on ne peut pas bêtement remplacer sur la diagonal car on obtiendrait 0^0. Donc si $n = 0$, on fait le calcul séparément et on trouve : $\boxed{A^0 = I_3.}$ Sinon, si $n \neq 0$:

$$\begin{aligned}
A^n &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3^n \\ 0 & 0 & 3^n \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3^n & 3^n & 3^n \\ 3^n & 3^n & 3^n \\ 3^n & 3^n & 3^n \end{pmatrix} \\
&= 3^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \boxed{3^{n-1}A.}
\end{aligned}$$

Exercice 5 - Calcul d'une puissance via la diagonalisation

On considère :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Il y a plusieurs moyens de trouver le spectre.
   - **Méthode 1 :** la méthode classique. On étudie $A - \lambda I_3$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.
     Par opérations sur les lignes :

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ -2 & -2 & 5-\lambda \end{pmatrix} \\
\underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\longleftrightarrow} & \begin{pmatrix} -2 & -2 & 5-\lambda \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ 1-\lambda & -2 & 2 \end{pmatrix} \\
\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\longleftrightarrow} & \begin{pmatrix} -2 & -2 & 5-\lambda \\ 0 & 3-\lambda & -3+\lambda \\ 1-\lambda & -2 & 2 \end{pmatrix} \\
\underset{L_3 \leftarrow 2L_3 + (1-\lambda)L_1}{\longleftrightarrow} & \begin{pmatrix} -2 & -2 & 5-\lambda \\ 0 & 3-\lambda & -3+\lambda \\ 0 & -6+2\lambda & 4+(1-\lambda)(5-\lambda) \end{pmatrix} \\
\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2}{\longleftrightarrow} & \begin{pmatrix} -2 & -2 & 5-\lambda \\ 0 & 3-\lambda & -3+\lambda \\ 0 & 0 & -2+2\lambda+(1-\lambda)(5-\lambda) \end{pmatrix} \\
\longleftrightarrow & \begin{pmatrix} -2 & -2 & 5-\lambda \\ 0 & 3-\lambda & -3+\lambda \\ 0 & 0 & 3+-4\lambda+\lambda^2 \end{pmatrix} \\
\longleftrightarrow & \begin{pmatrix} -2 & -2 & 5-\lambda \\ 0 & 3-\lambda & -3+\lambda \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda-3) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

     Donc $A - \lambda I_3$ est inversible si et seulement si $3 - \lambda \neq 0$ et $(\lambda - 1)(\lambda - 3) \neq 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\lambda \in \mathrm{Sp}(A) &\Leftrightarrow 3 - \lambda = 0 \text{ ou } (\lambda-1)(\lambda-3) = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 3.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{1, 3\}.}$$

- **Méthode 2 :** comme le sujet nous dit qu'il faut trouver 1 et 3, on peut soupçonner que $(x-1)(x-3)$ est annulateur. On a $(x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$. Calculons donc :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 8 \\ -8 & 1 & 8 \\ -8 & -8 & 17 \end{pmatrix}.$$

On a donc :

$$A^2 - 4A + 3I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 8 \\ -8 & 1 & 8 \\ -8 & -8 & 17 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $x^3 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$ est annulateur de A. D'où :

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \{1, 3\}.$$

Il reste à vérifier l'inclusion réciproque.
Clairement, on a :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$, c'est bien un vecteur propre et donc $1 \in \mathrm{Sp}(A)$.
Pour la seconde valeur, on peut par exemple considérer :

$$A - 3I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comme toutes ses lignes sont égales, clairement $A - 3I_3$ n'est pas inversible et donc $3 \in \mathrm{Sp}(A)$.
Ainsi :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{1, 3\}.}$$

2. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_1(A) & \Leftrightarrow & AX = X \\
& \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y + 2z & = & x \\ -2x + y + 2z & = & y \\ -2x - 2y + 5z & = & z \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} -2y + 2z & = & 0 \\ -2x + 2z & = & 0 \\ -2x - 2y + 4z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} -y + z & = & 0 \\ -x + z & = & 0 \\ -x - y + 2z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1 - L_2}{\Leftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcl} -y + z & = & 0 \\ -x + z & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & z \\ x & = & z \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow & X = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow & X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).
\end{array}$$

Donc $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $E_1(A)$. Comme c'est une famille d'un unique vecteur non nul, elle est libre.

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est donc une base de } E_1(A).}$$

On a également :

$$\begin{aligned}
X \in E_3(A) &\Leftrightarrow AX = 3X \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y + 2z &=& 3x \\ -2x + y + 2z &=& 3y \\ -2x - 2y + 5z &=& 3z \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -2x - 2y + 2z &=& 0 \\ -2x - 2y + 2z &=& 0 \\ -2x - 2y + 2z &=& 0 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow -x - y + z = 0 \\
&\Leftrightarrow z = x + y \\
&\Leftrightarrow X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

Donc $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $E_1(A)$. Comme c'est une famille de deux vecteurs non colinéaires, elle est libre.

$\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est donc une base de } E_3(A).}$

3. La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est la concaténation de familles libres de sous-espaces propres distincts de A. Elle est donc libre.
De plus card $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 3 = \dim \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, donc c'est une base. Elle est constituée de vecteurs propres de A.
D'après la formule de changement de bases, on a ainsi :

$$\boxed{A = PDP^{-1}}$$

où $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.}$

4. Utilisons l'algorithme de Gauss-Jordan :

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\longleftrightarrow}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2\leftarrow L_2-L_3}{\longleftrightarrow}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\underset{L_1\leftarrow L_1+L_2}{\longleftrightarrow}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2\leftarrow -L_2}{\longleftrightarrow}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

D'où :

$$\boxed{P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}}$$

5. Comme dans l'exercice précédent, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
A^n &= PD^nP^{-1}\\
&= \begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1^n&0&0\\0&3^n&0\\0&0&3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3^n&0\\0&0&3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1&3^n&0\\1&0&3^n\\1&3^n&3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}\\
&= \boxed{\begin{pmatrix}1&1-3^n&3^n-1\\1-3^n&1&3^n-1\\1-3^n&1-3^n&2\times 3^n-1\end{pmatrix}}.
\end{aligned}$$

2 Études de suites récurrentes linéaires

Exercice 6 - Deux suites couplées

On considère :

$$A=\begin{pmatrix}7&2\\-4&1\end{pmatrix}.$$

1. (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\lambda \in \mathrm{Sp}(A) &\Leftrightarrow A - \lambda I_2 \text{ non-inversible} \\
&\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_2) = 0 \\
&\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} 7-\lambda & 2 \\ -4 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow (7-\lambda)(1-\lambda) + 8 = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 7 + 8 = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0.
\end{aligned}$$

À ce stade, soit vous voyez que 3 est racine, soit on part sur un calcul de déterminant :

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 15 = 64 - 60 = 4 > 0.$$

Donc le polynôme a deux racines :

$$\lambda_1 = \frac{8 - \sqrt{4}}{2} = 3 \text{ et } \lambda_2 = \frac{8 + \sqrt{4}}{2} = 5.$$

D'où :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{3, 5\}.}$$

(b) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
X \in E_3(A) &\Leftrightarrow AX = 3X \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 7x + 2y &=& 3x \\ -4x + y &=& 3y \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 4x + 2y &=& 0 \\ -4x - 2y &=& 0 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow y = -2x \\
&\Leftrightarrow X = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right).}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned}
X \in E_5(A) &\Leftrightarrow AX = 3X \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 7x + 2y &=& 5x \\ -4x + y &=& 5y \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 2y &=& 0 \\ -4x - 4y &=& 0 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow y = -x \\
&\Leftrightarrow X = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{E_5(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right).}$$

2. A possède exactement deux valeurs propres distinctes et est d'ordre deux. $\boxed{A \text{ est donc diagonalisable.}}$ Ainsi il existe bien P inversible et D diagonale telle que :

$$A = PDP^{-1}.$$

Techniquement, cela suffit pour répondre à la question. Malheureusement, dès la question suivante, il va nous falloir P et D. Donc travaillons un peu plus.

D'après ce qui précède, $\left(\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $E_3(A)$. Comme c'est une famille d'un unique vecteur non nul, elle est également libre. C'est donc une base de $E_3(A)$.

Exactement de la même manière, on peut affirmer que $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_5(A)$.

La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$ est donc la concaténation de deux familles libres de sous-espaces propres distincts de A. C'est donc une famille libre. De plus, $\text{card}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right) = 2 = \dim \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. C'est donc une base de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.

Ainsi, d'après la formule des changements de base, il existe P et D telles que :

$$A = PDP^{-1}$$

où $\boxed{P = \begin{pmatrix}1 & 1\\-2 & -1\end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix}3 & 0\\0 & 5\end{pmatrix}.}$

3. Encore une fois, on montre par une récurrence immédiate que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
A^n &= PD^nP^{-1}\\
&= \begin{pmatrix}1 & 1\\-2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3^n & 0\\0 & 5^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\2 & 1\end{pmatrix}\\
&\quad \text{(où j'ai utilisé la formule de la comatrice pour } P^{-1}\text{)}\\
&= \begin{pmatrix}3^n & 5^n\\-2\times 3^n & -5^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\2 & 1\end{pmatrix}\\
&= \boxed{\begin{pmatrix}2\times 5^n - 3^n & 5^n - 3^n\\2(3^n - 5^n) & 2\times 3^n - 5^n\end{pmatrix}.}
\end{aligned}$$

4. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix}$ où (u_n) et (v_n) sont les suites définies par $u_0 = v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = 7u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = -4u_n + v_n \end{cases}.$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\boxed{X_{n+1} = \begin{pmatrix}u_{n+1}\\v_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7u_n + 2v_n\\-4u_n + v_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 & 2\\-4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix} = AX.}$$

(b) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$X_n = A^nX_0.$$

- **Initialisation :** Clairement $A^0X_0 = I_2X_0 = X_0$ et donc la propriété est bien initialisée.

- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $X_n = A^n X_0$. On a alors :

$$X_{n+1} = AX_n = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_0.$$

Et donc la propriété est bien héréditaire.

Par principe de récurrence, on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{X_n = A^n X_0.}$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X_n = \begin{pmatrix} 2 \times 5^n - 3^n & 5^n - 3^n \\ 2(3^n - 5^n) & 2 \times 3^n - 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 5^n - 2 \times 3^n \\ 4 \times 3^n - 3 \times 5^n \end{pmatrix}.$$

Ainsi on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{rcl} u_n & = & 3 \times 5^n - 2 \times 3^n \\ v_n & = & 4 \times 3^n - 3 \times 5^n \end{array} \right. .}$$

Exercice 7 - Une suite récurrente linéaire d'ordre 3

On considère une suite (u_n) définie par ses trois premiers termes et la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ et finalement :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\boxed{MX_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ -2u_n + 3u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} = X_{n+1}.}$$

Comme dans l'exercice précédent, montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$X_n = M^n X_0.$$

- **Initialisation :** Clairement $M^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0$ et donc la propriété est bien initialisée.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $X_n = A^n X_0$. On a alors :

$$X_{n+1} = MX_n = M \times M^n X_0 = M^{n+1} X_0.$$

Et donc la propriété est bien héréditaire.

Par principe de récurrence, on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{X_n = M^n X_0.}$$

2. (a) Je vous propose deux méthodes pour déterminer le spectre de M et les sous-espaces propres de M.

- **Méthode 1 :** la classique.
  Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :
  $$\lambda \in \mathrm{Sp}(M) \Leftrightarrow M - \lambda I_3 \text{ non inversible}$$
  Déterminons donc l'inversibilité de $M - \lambda I_3$.
  Travaillons par opérations sur les lignes :

$$
\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -2 & 3 & -\lambda \end{pmatrix} \\
\underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\longleftrightarrow} \quad & \begin{pmatrix} -2 & 3 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\underset{L_3 \leftarrow 2L_3 - \lambda L_1}{\longleftrightarrow} \quad & \begin{pmatrix} -2 & 3 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 2-3\lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} \\
\underset{L_2 \leftarrow 3L_2 - L_3}{\longleftrightarrow} \quad & \begin{pmatrix} -2 & 3 & -\lambda \\ 0 & -2 & 3-\lambda^2 \\ 0 & 2-3\lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} \\
\underset{L_3 \leftarrow 2L_3 + (2-3\lambda) L_2}{\longleftrightarrow} \quad & \begin{pmatrix} -2 & 3 & -\lambda \\ 0 & -2 & 3-\lambda^2 \\ 0 & 0 & 2\lambda^2 + (2-3\lambda)(3-\lambda^2) \end{pmatrix} \\
\longleftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} -2 & 3 & -\lambda \\ 0 & -2 & 3-\lambda^2 \\ 0 & 0 & 2\lambda^2 + 3\lambda^3 - 2\lambda^2 - 9\lambda + 6 \end{pmatrix} \\
\longleftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} -2 & 3 & -\lambda \\ 0 & -2 & 3-\lambda^2 \\ 0 & 0 & 3(\lambda^3 - 3\lambda + 2) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

  Ainsi :

$$
\begin{aligned}
\lambda \in \mathrm{Sp}(M) & \Leftrightarrow M - \lambda I_3 \text{ non inversible} \\
& \Leftrightarrow \lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0 \\
& \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 2) = 0 \\
& \qquad \text{(on remarque en effet que 1 est racine évidente)} \\
& \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0 \\
& \qquad \text{(car 1 est encore racine évidente)} \\
& \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = -2.
\end{aligned}
$$

  Ainsi :
  $$\mathrm{Sp}(M) = \{1, -2\}.$$

Soit alors $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
X \in E_1(M) \quad & \Leftrightarrow \quad MX = X \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = x \\ z = y \\ -2x + 3y = z \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + y = 0 \\ -y + z = 0 \\ -2x + 3y - z = 0 \end{cases} \\
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 + L_2}{\Leftrightarrow} \quad \begin{cases} -x + y = 0 \\ -y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = y \\ z = y \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad X = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad X \in \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\boxed{E_1(M) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned}
X \in E_{-2}(M) \quad & \Leftrightarrow \quad MX = -2X \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = -2x \\ z = -2y \\ -2x + 3y = -2z \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2y + z = 0 \\ -2x + 3y + 2z = 0 \end{cases} \\
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1 - 2L_2}{\Leftrightarrow} \quad \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = -2x \\ z = -2y = 4x \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad X = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad X \in \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\boxed{E_{-2}(M) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}\right).}$$

- **Méthode 2 :** l'astucieuse.

  Si on lit la suite de l'énoncé, on voit que M doit être semblable à $T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dont le spectre est $\{1, -2\}$. On peut donc conjecturer que le spectre est de M est le même [5].

  On peut assez facilement vérifier que 1 et -2 sont valeurs propres (on va le voir juste après). Mais comment s'assurer que ce sont les seules valeurs propres ?

  On peut chercher un polynôme annulateur. On remarquera cependant que $(x+2)(x-1)$ n'est pas annulateur [6] de M !

  L'astuce est que 1 apparaît deux fois sur la diagonale de T et donc ça nous pousse à regarder le polynôme : $(x+2)(x-1)^2$.

  On a :

$$\begin{aligned}
(M+2I_3)(M-I_3)^2 &= (M+2I_3)(M-I_3)(M-I_3) \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \\
& \quad \text{on remarque à cette étape qu'effectivement} \\
& \quad (x+2)(x-1) \text{ n'est pas annulateur)} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

  Donc $(x+2)(x-1)^2$ est bien annulateur de M.

  Ainsi :

$$\boxed{\text{Sp}(M) \subset \{-2, 1\}.}$$

5. En fait c'est nécessairement le cas d'après le programme d'appro.
6. C'est normal. D'après la suite de l'énoncé, M n'est pas diagonalisable. Mais on a fait des exercices qui montre que M est nécessairement diagonalisable si elle a un polynôme annulateur à racines simples. C'est un résultat hors-programme mais qui est redémontré régulièrement dans des exercices un peu difficiles.

On procède ensuite comme d'habitude. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a : On a :

$$\begin{aligned}
MX = X \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y & = & x \\ z & = & y \\ -2x+3y & = & z \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x+y & = & 0 \\ -y+z & = & 0 \\ -2x+3y-z & = & 0 \end{cases} \\
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 + L_2}{\Leftrightarrow} \quad \begin{cases} -x+y & = & 0 \\ -y+z & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x & = & y \\ z & = & y \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad X = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

Donc, comme il y a une solution non triviale, on a bien $\boxed{1 \in \mathrm{Sp}(M)}$ et :

$$\boxed{E_1(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).}$$

De même :

$$\begin{aligned}
MX = -2X \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y & = & -2x \\ z & = & -2y \\ -2x+3y & = & -2z \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x+y & = & 0 \\ 2y+z & = & 0 \\ -2x+3y+2z & = & 0 \end{cases} \\
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1 - 2L_2}{\Leftrightarrow} \quad \begin{cases} 2x+y & = & 0 \\ 2y+z & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y & = & -2x \\ z & = & -2y = 4x \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad X = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

Donc, comme il y a une solution non triviale, on a bien $\boxed{-2 \in \mathrm{Sp}(M)}$ et :

$$\boxed{E_{-2}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}\right).}$$

(b) La matrice M *n'a pas l'air diagonalisable.* En effet, on n'a trouvé que deux sous-espaces propres, chacun de dimension 1, alors que la matrice est d'ordre 3. Ça n'a pas l'air de coller.

Et effectivement, ça ne colle pas. Malheureusement, le programme ne contient plus le théorème permettant de l'affirmer. On va donc devoir le montrer à la main.

Montrons-le par l'absurde. Supposons donc que M est diagonalisable. Il existe donc une base (X_1, X_2, X_3) de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de M. En particulier (X_1, X_2, X_3) est libre.

X_1 est un vecteur propre. Il y a donc une valeur propre associée. Il n'y a que deux possibilités :

- La valeur propre associée à X_1 est 1. Dans ce cas, montrons que la valeur propre associée à X_2 est -2.

  En effet si jamais la valeur propre associée à X_2 est 1 alors (X_1, X_2) est une famille libre de $E_1(M)$ qui est pourtant de dimension au plus 1 (puisque ce sous espace possède une famille génératrice de cardinal 1). Or $\mathrm{card}(X_1, X_2) = 2$, c'est donc impossible.

  Donc la valeur propre associée à X_2 est -2.

  Mais pour la même raison, la valeur propre associée à X_3 ne peut être ni 1 ni -2. En effet, si c'est 1, alors (X_1, X_3) est une famille libre de $E_1(M)$ de cardinal 2 dans un espace de dimension au plus 1 (c'est impossible). Et si c'est -2 alors (X_2, X_3) est une famille libre de $E_{-2}(M)$ de cardinal 2 dans un espace de dimension au plus 1 (c'est impossible aussi).

  Donc X_3 n'a pas de valeur propre associée. C'est impossible.

- La valeur propre associée à X_1 est -2.

  Exactement de la même manière, on montre que la valeur propre associée à X_2 est 1 puis que X_3 n'a pas de valeur propre associée. Encore une fois, c'est impossible.

Comme aucun cas n'est possible, c'est absurde.

Donc $\boxed{M \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

3. (a) On pose $e'_1 = (1, -2, 4)$, $e'_2 = (1, 1, 1)$ et $e'_3 = (0, 1, 2)$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à M.

Montrons que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base. Pour cela, commençons par montrer qu'elle est libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 + \lambda_3 e'_3 = 0$. Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

On a donc :

$$\lambda_1(1, -2, 4) + \lambda_2(1, 1, 1) + \lambda_3(0, 1, 2) = (0, 0, 0).$$

Donc :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 & = & 0 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ 4\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Résolvons le système. On a :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 & = & 0 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ 4\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1}}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 & = & 0 \\ 3\lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ -3\lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 & = & 0 \\ 3\lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ 3\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

D'où $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Et donc $\boxed{\text{la famille } (e'_1, e'_2, e'_3) \text{ est libre.}}$

De plus $\mathrm{card}(e_1', e_2', e_3') = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Donc $\boxed{\text{la famille est également génératrice et une base de } \mathbb{R}^3.}$
On a :

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$\boxed{f(e_1') = -2e_1'.}$$

De même, on a :

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$\boxed{f(e_2') = e_2'.}$$

Et enfin :

$$M \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$\boxed{f(e_3') = e_2' + e_3'.}$$

Ainsi T, la matrice de f dans la base (e_1', e_2', e_3'), est bien :

$$\boxed{T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

(b) Comme dans un des premiers exercices, on peut remarquer que :

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons pour la suite $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Il convient d'abord de remarquer que D et N commutent. En effet :

$$DN = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et :

$$ND = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc on a bien $\boxed{DN = ND.}$ On va donc pouvoir appliquer le binôme de Newton.
Pour que ce soit intéressant cependant, il faudrait des propriétés particulières sur D et N. Et, ça tombe bien, on en a deux :

- D est diagonale, donc ses puissances sont simples à calculer. On a en particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$D^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- N est nilpotente. En effet :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  On en déduit par une récurrence immédiate que pour tout $k \geqslant 2$, $N^k = 0$.

Passons donc au calcul des puissances de T. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Comme d'habitude, comme $N^k = 0$ pour $k \geqslant 2$, il y a *au plus* 2 termes dans la somme. Il peut cependant y en avoir moins.

Traitons rapidement ces cas :

- Si $n = 0$, alors $T^n = T^0 = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Si $n = 1$, alors $T^n = T^1 = T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si $n \geqslant 2$, on peut en revanche écrire :

$$\begin{aligned}
T^n &= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k \\
&= \binom{n}{0} D^n I_3 + \binom{n}{1} D^{n-1} N \\
&= 1 \times \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} (-2)^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

De manière intéressante, on remarque que la formule reste valable pour $n \in \{0, 1\}$.

Donc pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\boxed{T^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

4. D'après la formule de changement de base, on a :

$$\boxed{M = PTP^{-1}}$$

où :

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.}$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$M^n = PT^nP^{-1}.$$

- **Initialisation :** D'une part, $PT^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$.
  D'autre part $M^0 = I_3$.
  Ainsi $M^0 = PT^0P^{-1}$ et donc la propriété est bien initialisée.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $M^n = PT^nP{-}1$. On a alors :

$$M^{n+1} = M \times M^n = PTP^{-1} \times PT^nP^{-1} = PT^{n+1}P^{-1}.$$

  Et donc la propriété est bien héréditaire.

Par principe de récurrence, on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{M^n = PT^nP^{-1}.}$$

5. (a) Utilisons l'algorithme de Gauss-Jordan pour inverser P. Par opérations sur les lignes :

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1}}{\longleftrightarrow} \quad &\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\longleftrightarrow} \quad &\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3}{\longleftrightarrow} \quad &\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\
\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_3}{\longleftrightarrow} \quad &\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{8}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\
\underset{L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2}{\longleftrightarrow} \quad &\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{8}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\
\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\longleftrightarrow} \quad &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

   Donc :

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}.}$$

   (b) On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$M^n = PT^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

   On nous demande uniquement de calculer la première ligne de M^n (notons-la L_1). Pour cela, il nous faut la première ligne du produit $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)^n & 1 & n \end{pmatrix}.$$

Et donc :

$$\boxed{L_1 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}(-2)^n & 1 & n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & -1 \\ -6 & 3 & 3\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}(-2)^n + 8 - 6n & (-2)^{n+1} + 2 + 3n & (-2)^n - 1 + 3n\end{pmatrix}.}$$

Comme $X_n = M^n X_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, en considérant uniquement la première ligne, on a :

$$u_n = L_1 \begin{pmatrix}u_0 \\ u_1 \\ u_2\end{pmatrix}$$

où on a identifié les matrices 1×1 et les nombres réels.
D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{u_n = \frac{1}{9}\left(((-2)^n + 8 - 6n)u_0 + ((-2)^{n+1} + 2 + 3n)u_1 + ((-2)^n - 1 + 3n)u_2\right).}$$