Exos de colles préparés : Probas - v.a.r.d

Exercice 1

Un sauteur en hauteur tente de franchir, dans cet ordre, des hauteurs successives numérotées 1, 2, 3...
La probabilité de franchir la hauteur k vaut $\frac{1}{k}$ et le sauteur est éliminé à son premier échec.
Soit X le numéro aléatoire du dernier saut réussi.

1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. En travaillant avec les événements R_k : "le saut numéro k est réussi", déterminer la loi de X.
3. Calculer l'espérance de X.
4. Calculer l'espérance de $X(X-2)$ puis en déduire la variance de X.

Exercice 2

Dans une population, on estime que le nombre d'enfants par famille suit la loi de Poisson de paramètre λ avec $\lambda > 0$.

1. Dans les familles de n enfants, quelle est la probabilité que tous les enfants soient des filles ?
2. Rappeler la loi de probabilité d'une variable suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
3. En supposant les sexes équiprobables à la naissance, calculer la probabilité qu'une famille choisie au hasard n'ait que des filles.

Exercice 3

On considère une urne U contenant deux boules blanches et une boule noire ; ainsi qu'une urne V contenant une boule blanche et trois boules noires, toutes indiscernables au toucher. On effectue une succession de tirages avec remise d'une boule dans ces urnes comme suit :

- le premier tirage a lieu dans l'urne U,
- si l'on pioche une boule blanche lors d'un tirage, le tirage suivant s'effectue dans l'autre urne,
- si l'on pioche une boule noire lors d'un tirage, le tirage suivant s'effectue dans la même urne.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note Un l'événement : "le $n-$ième tirage s'effectue dans l'urne U" et $u_n = \mathrm{P}(Un)$.

1. Calculer u_3.
2. Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. On admet que $P(U_n)$ et $P\left(\overline{U_n}\right)$ sont non nulles. Donner les valeurs de $P_{U_n}(U_{n+1})$ et $P_{\overline{U_n}}(U_{n+1})$.
3. Établir une relation de récurrence d'ordre 1 sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
4. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 4 (DM ?)

Agathe, Blaise et Colyne lancent successivement un dé équilibré à 6 faces. Agathe joue, puis Blaise, puis Colyne, puis à nouveau Agathe,...
Le premier à obtenir 6 gagne la partie. On suppose les lancers de dés mutuellement indépendants.
On note A (respectivement B et C) l'événement "Agathe (respectivement Blaise ou Colyne) gagne la partie"
On note pour tout entier k non nul S_k : "obtenir 6 au lancer k" et D_k : "le premier 6 est obtenu au lancer k".

1. **a.** $\forall k \in \mathbb{N}^*$, exprimer les D_k en fonction des événements $S_{...}$.
   b. Calculer la probabilité que Colyne gagne la partie.
   c. De la même manière, calculer la probabilité que les autres joueurs gagnent la partie.
2. Ils décident de parier chacun une mise de départ pour jouer et décident que le vainqueur gagnera le pot.
   a. Combien doivent-ils miser pour que le jeu soit équitable ?
   b. Pour lequel des joueurs ce jeu est-il le plus risqué ? Justifier par un calcul.