QC et Méthodes : Probabilités - Variables aléatoires discrètes

Questions de cours :

1. Que faut-il justifier quand on veut utiliser la formule $\mathrm{P}(A) = \frac{\# A}{\# \Omega}$?
2. Que faut-il justifier quand on veut utiliser la formule $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$?
3. Comment faire pour calculer la probabilité d'une réunion ?
4. Que faut-il justifier quand on veut utiliser la formule $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B)$?
5. Comment faire pour calculer la probabilité d'une intersection ?
6. Citer les deux formules des probabilités totales.
7. Condition d'existence et formule pour l'espérance d'une variable aléatoire discrète.
8. Condition d'existence et formule-définition pour la variance d'une variable aléatoire discrète.
9. Qu'est-ce que le moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire X ? Comment le calcule-t-on et à quelle condition existe-t-il ?
10. Condition d'existence et formule-pratique pour la variance d'une variable aléatoire discrète. Quel est le nom de cette formule ?
11. Citer le théorème de transfert et ses hypothèses.
12. Quelle est
    - la notation
    - l'univers-image
    - la probabilité $\mathrm{P}(X = k)$
    - l'espérance
    - la variance
    - la syntaxe-python

    d'une variable aléatoire suivant la loi
    - uniforme sur $[\![1, n]\!]$
    - de Bernoulli de paramètre p
    - binomiale de paramètre n et p
    - géométrique de paramètre p
    - de Poisson de paramètre λ

    ?
13. Comment reconnaît-on une v.a.r suivant une loi
    - de Bernoulli de paramètre p
    - certaine

    ?
14. Quelle est la phrase à donner quand on reconnait le cas d'emploi de la loi
    - binomiale de paramètre n et p
    - géométrique de paramètre p

    ?
15. Méthodologie générale pour les calculs de probabilité.
16. Si X admet une espérance et une variance, $\mathrm{E}(aX + b) = \ldots$ $\quad \mathrm{V}(aX + b) = \ldots$
17. Comment former un système complet d'événements grâce à une variable aléatoire ?

Savoir-faire et Méthodes :

1. Méthodologie générale sur les calculs de proba .... §1.6 du cours, QC15, ex 1, 2, 6 et 10 du cours
2. Dénombrer des cas pour calculer des probas en situtation d'équiprobabilité .... ex 8 du cours et ex 6 et 9 du TD
3. Calculer et justifier la probabilité d'une union ou d'une intersection d'événements .... ex 1, 2 et 6 du cours
4. Reconnaître une situation d'emploi de la FPT et la mettre en œuvre .... ex 3 et 4 du cours
5. Reconnaître une situation d'emploi de la FPT et la mettre en œuvre avec une SCE issu d'une v.a.r .... ex 12 du cours
6. Reconnaître le cas d'emploi et utiliser la FPC .... ex 5 du cours
7. Décomposer un événement portant sur une v.a.r en événements élémentaires et faire des calculs de proba .. ex 7 et 9 du cours
8. Déterminer la loi d'une variable aléatoire .... ex 8, 9 et 10 du cours
9. Faire des calculs d'espérance et de variance .... ex 11 du cours et ex 11 du TD
10. Reconnaître et justifier une situation d'équiprobabilité, d'emploi de la loi uniforme, de Bernoulli, binomiale ou géométrique dans un contexte concret .... ex 12 du cours et ex 2, 3, 4, 8 et 9 du TD
11. Reconnaître le cas d'emploi et utiliser le thm de transfert .... ex 12 du TD

Les corrigés se trouvent page suivante...

Réponses aux questions de cours :

1. Que faut-il justifier quand on veut utiliser la formule $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$?
↪ que l'on est en situation d'équiprobabilité.

2. Que faut-il justifier quand on veut utiliser la formule $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$?
↪ Que les événements A et B sont incompatibles (autrement dit que la réunion est disjointe).

3. Comment faire pour calculer la probabilité d'une réunion ?
↪ On utilise la formule du crible $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
OU on justifie que les événements A et B sont incompatibles et on utilise $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

N.B. : Plus avancé : on a aussi des résultats pour la réunion de trois événements :
- Formule du crible : $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$
- si A, B et C sont incompatibles : $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

4. Que faut-il justifier quand on veut utiliser la formule $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$?
↪ Que les événements sont indépendants.

5. Comment faire pour calculer la probabilité d'une intersection ?
↪ La FPC $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$
OU on justifie que les événements sont indépendants et on a plus simplement : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

N.B. : Plus avancé : on a aussi des résultats similaires pour la réunion de plus de trois événements :
- FPC : $\mathrm{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathrm{P}(A_1) \cdot \mathrm{P}_{A_1}(A_2) \cdot \mathrm{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \ldots \mathrm{P}_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$
- si les A_i sont indépendants : $\mathrm{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathrm{P}(A_1) \cdot \mathrm{P}(A_2) \cdot \mathrm{P}(A_3) \ldots \mathrm{P}(A_n)$

6. Citer les deux formules des probabilités totales.
↪ Si $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(B) &= \sum_{i \in I} \mathrm{P}(B \cap A_i) \\ &= \sum_{i \in I} \mathrm{P}(A_i) \times \mathrm{P}_{A_i}(B) \qquad \text{si de plus tous les } A_i \text{ sont de probabilité non nulle} \end{aligned}$$

7. Condition d'existence et formule pour l'espérance d'une variable aléatoire discrète.
↪ $\mathrm{E}(X)$ existe si et seulement si $\sum_{k \in X(\Omega)} k\mathrm{P}(X = k)$ est absolument convergente ou la v.a.r X est finie. Dans ce cas, $\mathrm{E}(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k\mathrm{P}(X = k)$

8. Condition d'existence et formule-définition pour la variance d'une variable aléatoire discrète.
↪ $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\Big(\big(X - \mathrm{E}(X)\big)^2\Big)$ (sous réserve d'absolue convergence lorsque l'univers image $X(\Omega)$ est infini)

9. Qu'est-ce que le moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire X ? Comment le calcule-t-on et à quelle condition existe-t-il ?
↪ C'est $\mathrm{E}(X^2)$. Il existe si et seulement si la v.a.r X est finie ou sous réserve de convergence de la série $\sum_{k \in X(\Omega)} k^2\mathrm{P}(X = k)$
et il vaut $E(X^2) = \sum_{k \in X(\Omega)} k^2\mathrm{P}(X = k)$

10. Condition d'existence et formule-pratique pour la variance d'une variable aléatoire discrète. Quel est le nom de cette formule ?
↪ Formule de Koenig-Huygens : $V(X) = \mathrm{E}(X^2) - \big(\mathrm{E}(X)\big)^2$ (sous réserve que la variable aléatoire admette un moment d'ordre deux)

11. Citer le théorème de transfert et ses hypothèses.
↪ $\mathrm{E}\big(f(X)\big) = \sum_{k \in X(\Omega)} f(k)\mathrm{P}(X = k)$ (sous réserve d'absolue convergence lorsque l'univers image $X(\Omega)$ est infini)

12. Quelle est
- la notation
- l'univers image
- la probabilité $\mathrm{P}(X=k)$
- l'espérance
- la variance

d'une variable aléatoire suivant la loi
- uniforme sur $[\![1,n]\!]$
- de Bernoulli de paramètre p
- binomiale de paramètre n et p
- géométrique de paramètre p
- de Poisson de paramètre λ

?

X suit la loi...	notation	$X(\Omega)$	probabilité $\mathrm{P}(X=k)$	espérance	variance	Python
Certaine égale à a	néant	$\{a\}$	$\mathrm{P}(X=a)=1$	a	0	
uniforme sur $[\![1,n]\!]$	$\mathscr{U}([\![1,n]\!])$	$[\![1,n]\!]$	$\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{n+1}{2}$	$\dfrac{n^2-1}{12}$	`rd.randint(1,n+1)`
de Bernoulli de paramètre p	$\mathscr{B}(p)$	$\{0,1\}$	$\mathrm{P}(X=1)=p,\ \mathrm{P}(X=0)=1-p$	p	$p(1-p)$	
binomiale de paramètres n et p	$\mathscr{B}(n,p)$	$[\![0,n]\!]$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$	`rd.binomial(n,p)`
de Poisson de paramètre λ	$\mathscr{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ	`rd.poisson(lambda)`
Géométrique de paramètre p	$\mathscr{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	$p(1-p)^{k-1}$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$	`rd.geometric(p)`

13. Quelle est la phrase à donner quand on reconnait le cas d'emploi de la loi
- binomiale de paramètre n et p
- géométrique de paramètre p

?

↳ En interprétant comme succès "..." (dont la probabilité est égale à p), cette expérience correspond à une répétition de $\boldsymbol{n}$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes et X compte le nombre de succès dans cette expérience. On peut donc conclure que X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.
↳ En interprétant comme succès "..." (dont la probabilité est égale à p), cette expérience correspond à une répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes et X désigne le rang du premier succès dans cette expérience. On peut donc conclure que X suit la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$.

14. Comment reconnaît-on une v.a.r suivant une loi
- de Bernoulli de paramètre p
- certaine

?

↳ Toute variable aléatoire d'univers-image $\{0,1\}$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $p=\mathrm{P}(X=1)$.
↳ Toute variable aléatoire d'univers-image réduite à un seul nombre suit une loi certaine.
OU Toute variable aléatoire de variance nulle suite une loi certaine.

15. Méthodologie générale pour les calculs de probabilité.
↳ On effectue dans l'ordre les étapes suivantes *(sauf si l'énoncé ou les questions intermédiaire l'on déjà fait)* :

① Nommer l'événement par une lettre majuscule *(A par exemple)*

② identifier des événements élémentaires que l'on nommera également *(on doit savoir calculer leur probabilité)*

③ Décrire A explicitement par une phrase : A est réalisé si et seulement si....

④ Formaliser A comme étant égale à une réunion et/ou intersection d'événements élémentaires : $A=\ldots$

⑤ Et ENFIN, calculer la probabilité de A : $P(A)=\ldots$

16. Si X admet une espérance et une variance, $\mathsf{E}(aX+b)=a\mathsf{E}(X)+b$ par linéarité de l'espérance $\mathsf{V}(aX+b)=a^2\mathsf{V}(X)$

17. Comment former un système complet d'événements grâce à une variable aléatoire ?
↳ $\{(X=k)\}_{k\in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements.