Probas et variables aléatoires discrètes - révisions

Top Chrono

Exercice 1 (SF7&8)

Soient $p \in]0,1[$ et X une v.a.r dont la loi est donnée par : $P(X=-1)=\frac{p}{2}$, $P(X=0)=1-p$, $P(X=1)=\frac{p}{2}$. Donner la loi de $Y=X^2$.

Exercice 2 (SF10)

Soit X une v.a.r. suivant la loi $\mathscr{B}(n,p)$. Déterminer la loi de $Y=n-X$.

Exercice 3 (SF10)

On effectue des lancers d'une pièce équilibrée. On note X le nombre de lancers de pièces nécessaires pour obtenir pile. Déterminer la loi de X, son espérance, sa variance.

Exercice 4 (SF10)

On sait que la probabilité qu'une personne soit allergique à un certain médicament est égale à 10^{-3}. On s'intéresse à un échantillon de 1000 personnes. On appelle X la v.a.r. dont la valeur est le nombre de personnes allergiques dans l'échantillon. Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance et sa variance.

Exercice 5 (SF4)

On procède à l'expérience suivante : on lance un dé tétraédrique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 4. On dispose de 4 urnes numérotées de 1 à 4 contenant chacune une balle blanche et autant de balles noires que le numéro de l'urne.
On effectue un lancer de dé puis on pioche une balle dans l'urne correspondante. Quelle est la probabilité que la balle tirée soit blanche ?

Exercices d'entrainement

Exercice 6 (SF1&2&6)

Une urne contient 5 boules blanches et 3 boules noires. L'expérience consiste à tirer successivement 3 boules, sans remise.

1. Quelle est la probabilité que les trois boules tirées soient blanches ?
2. Quelle est la probabilité qu'une boule noire apparaisse pour la première fois au deuxième tirage ?

Exercice 7 (SF7&8&9)

Soit X une v.a.r dont la loi est donnée par $P(X=-2)=\frac{1}{5}$, $P(X=-1)=\frac{1}{10}$, $P(X=0)=\frac{1}{10}$, $P(X=1)=\frac{1}{5}$ $P(X=2)=\frac{2}{5}$.
Déterminer la loi de $Y=X^2$. Calculer son espérance et sa variance. Déterminer la loi de $Z=e^Y$

Exercice 8 (SF5&10)

On lance une pièce équilibrée jusqu'à l'obtention du premier PILE. Si n désigne le nombre de lancers effectués, on tire ensuite au hasard une balle dans une urne composée de 2^n balles dont n sont blanches. On appelle N la variable aléatoire correspondant au nombre total de lancers et B l'événement "tirer une boule blanche".

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité, sachant que l'on a réalisé n lancers au total, que la balle soit blanche. Comment formalise-t-on cette probabilité ?
2. Que constitue l'ensemble suivant : $\{(N=n)\}_{n\in\mathbb{N}^*}$?
3. En utilisant la formule des probabilités totales, calculer la probabilité de tirer une balle blanche.

Exercice 9 (SF2&9&10)

Un service après-vente dispose d'équipes de dépannage qui interviennent auprès de la clientèle sur appel téléphonique. Les appels se produisent de façon indépendante, et la probabilité qu'une équipe arrive en retard à la suite d'un appel est $p=1/4$.

1. Un même client a appelé le service à 8 dates différentes. Soit X le nombre de retards que ce client a subi.
   a. Reconnaître la loi de probabilité de X.
   b. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
2. On considère un ensemble de 8 clients différents, 2 d'entre eux sont mécontents parce qu'ils ont subi un retard. On contacte 4 clients parmi les 8. Soit M le nombre de clients mécontents parmi les 4 contactés.
   a. Quelle est la loi de M ? L'expliciter sous forme de tableau.
   b. Calculer $E(M)$ et $V(M)$.

Exercice 10 (SF1&3)

On lance un dé équilibré jusqu'à l'obtention d'un 6. Les lancers sont supposés mutuellement indépendants. Quelle est la probabilité que tous les nombres obtenus soient pairs ?
($\forall n \in \mathbb{N}^*$, on travaillera avec les événements A_n "obtenir 2 ou 4 au lancer n", B_n "obtenir 6 au lancer n" et C_n "on a obtenu le premier 6 au lancer n et tous les lancers ont été pairs" *(indication : commencer par exprimer les événements $C_{\dots}$ en fonction des $A_{\dots}$ et $B_{\dots}$)*

Exercice 11 (SF9)

Soit X la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = a3^{-k}$

1. Déterminer a pour que l'on définisse ainsi une loi de probabilité.
2. X a-t-elle plus de chance de prendre des valeurs paires ou impaires ?
3. Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.
4. On considère la v.a.r. $Y = X(X-1)$. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

Exercice 12 (SF11)

Soit X une v.a.r. suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Déterminer $E\left(\frac{1}{X}\right)$.

(on admettra et utilisera la formule, valable pour tout $x \in]-1,1[$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$)

Exercice 13

Pour chaque variable aléatoire X suivante, donner $X(\Omega)$. Si elle est discrète finie, donner la loi de X sous forme de tableau. Calculer l'espérance et la variance de chacun de de ces lois.

1. X_1 est le nombre "Pile" obtenus en lançant quatre pièces de monnaie.
2. X_2 est le minimum de deux dés à six faces.
3. X_3 est le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche (on tire sans remise des boules dans une urne contenant 4 boules noires et 2 boules blanches)
4. X_4 est le produit de 4 nombres entiers tirés uniformément entre 0 et 2.

Exercice 14

On considère une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n $(n \geq 2)$. On prélève ces jetons au hasard, un par un et sans remise. A l'issue de l'expérience, on note $\omega = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ la liste des numéros tirés.

- Pour $2 \leq i \leq n$, on dit qu'il y a record au tirage i si u_i est plus grand que tous les numéros précédemment tirés, c'est-à-dire si $u_i > \max(u_1, \ldots, u_{i-1})$.
- D'autre part, on convient qu'il y a systématiquement record au tirage 1.

Calculer les probabilités qu'à l'issue de l'expérience on assiste exactement à : **1.** un seul record. **2.** n records. **3.** deux records.

Exercice 15 (d'après Ecricome)

On effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie. On suppose que les résultats des lancers sont indépendants et qu'à chaque lancer, la pièce donne pile avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ et face avec la probabilité $q = 1-p$.
On s'intéresse dans cet exercice à l'apparition de deux piles consécutifs.
Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement « deux piles consécutifs sont obtenus pour la première fois aux lancers numéro n et $n+1$. »
On définit alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des probabilités des événements A_n par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \mathrm{P}(A_n)$ avec la convention $a_0 = 0$.

1. Exprimer a_1, a_2 et a_3 en fonction de p et q.
2. En remarquant que l'événement A_{n+2} est réalisé si et seulement si :
   ou bien on a obtenu pile au premier tirage, face au deuxième tirage, et à partir de ce moment, A_n est réalisé
   ou bien on a obtenu face au premier tirage, et à partir de ce moment, A_{n+1} est réalisé
   montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} - q\,a_{n+1} - p\,q\,a_n = 0.$
3. Écrire une fonction Python, qui prend en paramètres d'entrée n et p et qui renvoie a_n.

Exercice d'approfondissement

Exercice 16 (Des questions classiques, de difficultés variées)

Soit X une v.a.r. suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

1. Démontrer que, pout tout $k \in \mathbb{N}^*$: $P(X = k) = P(X > k-1) - P(X > k)$
2. **a.** $(*)$ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\mathrm{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{P}(X > k) - n\mathrm{P}(X > n)$

   b. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la valeur de $\mathrm{P}(X > n)$ lorsque X suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

   c. Quelle est la limite de $n\mathrm{P}(X > n)$ lorsque n tend vers $+\infty$?

   d. En déduire que $\displaystyle E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$
3. Retrouver la valeur de $E(X)$ grâce aux réponses trouvées dans la question précédente.

Indications et/ou réponses brutes

Exercice 1

Déterminer l'univers-image $X(\Omega)$ de X et en déduire l'univers-image $Y(\Omega)$ de Y.
En déduire quelle catégorie de loi usuelle Y suit.
Déterminer le paramètre de cette loi.

Exercice 2

Reprendre la phrase de rédaction à connaître par cœur pour décrire X. Que compte alors Y ?

Exercice 3

Reconnaître une situation-type d'une loi usuelle et savoir les formules qui vont avec

Exercice 4

Reconnaître une situation-type d'une loi usuelle et savoir les formules qui vont avec

Exercice 5

Reconnaître une situation d'utilisation de la FPT

Exercice 6

1. $\frac{5}{28}$ à rédiger en reconnaissant une situation d'équiprobabilité et dénombrant des cas, ou en utilisant la formule des probabilités composées.
2. $\frac{15}{56}$ à rédiger en utilisant la formule des probabilités composées.

Exercice 7

Déterminer l'univers-image $X(\Omega)$ de X et en déduire l'univers-image $Y(\Omega)$ de Y.
Calculer les probabilités de la sorte : $\mathrm{P}(Y = ...) = \mathrm{P}(X^2 = ...) = \mathrm{P}(X = ...)$
On pourra s'inspirer de la question 3 de l'ex 9 du cours pour la loi de Y et de l'ex 11 du cours pour les calculs d'espérance et de variance

Exercice 8

1. Reconnaître une situation d'équiprobabilité et savoir écrire une probabilité conditionnelle
2. Reconnaître une loi usuelle et bien relire le §2.1 du cours (passage avec ⚠)
3. Reconnaître une situation d'utilisation de la FPT

Exercice 9

1. Reconnaître une situation-type d'une loi usuelle et savoir les formules qui vont avec
2. Commencer par déterminer l'univers-image de M.
   Ensuite, faire du dénombrement pour déterminer le nombre de quadruplets de clients possibles et le nombre de quadruplets de clients favorables dans chacune des situations correspondant aux événements élémentaires associés à la v.a.r M.
   Les calculs d'espérance et de variance se font avec les formules habituelles

Exercice 10

Bien décrire dans sa tête tous les possibilités favorables à ce que l'on veut obtenir : que se passe-t-il si le 6 arrive tout de suite ? s'il arrive en deuxième, s'il arrive en 3me ? etc
Trouver comment exprimer l'événement dont on nous demande de calculer la probabilité avec les $C_{...}$

Exercice 11

1. chaque $\mathrm{P}(X = k)$ doit être positif et leur somme pour k allant de 1 à $+\infty$ doit faire 1.
   On reconnaît une série géométrique convergente.
2. Calculer $\mathrm{P}(X = 1)$ et conclure
3. Utiliser les formules habituelles. Pour l'espérance, on veillera bien à justifier l'**absolue** convergence. Puis on calcule le moment d'ordre 2 puis la variance grâce à la formule de Koenig-Huygens. (on se souviendra de la technique $k^2 = k(k-1) + k$ et de ses connaissances sur les séries géométriques dérivées)
4. Utiliser la linéarité de l'espérance et exploiter les résultats de la question précédente

Exercice 12

Cas typique d'application du thm de transfert. Attention à bien justifier la convergence **absolue**.

Exercice 13

1. On reconnaît une loi usuelle. donner la phrase de rédaction attendue ici.

2. Donner l'univers-image puis faire un tableau à double entrée collectant le 36 possibilités de résultats des deux dés et dénombrer les situations favorables à chaque événement élémentaire portant sur X_2 parmi les 36 situations équiprobables.
3. Donner l'univers-image puis faire des formules des probabilités composées dans chaque situation
4. Donner l'univers-image puis bien formaliser les événements en fonctions des résultats des 4 nombres.