Probas et variables aléatoires discrètes - révisions
Éléments de correction

Top Chrono

Exercice 1

$X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ donc $Y(\Omega) = \{0, 1\}$

Donc Y suit une loi binomiale. Pour connaître son paramètre, on détermine $\mathrm{P}(Y = 1)$ (ou $1 - \mathrm{P}(Y = 0)$, qui est plus facile à obtenir ici)

$\mathrm{P}(Y = 0) = \mathrm{P}(X^2 = 0) = \mathrm{P}(X = 0) = 1 - p$ donc $\mathrm{P}(Y = 1) = 1 - \mathrm{P}(Y = 0) = 1 - (1 - p) = p$

Donc $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$

Exercice 2

On imagine une expérience correspondant à la répétition n expériences de Bernoulli de paramètre p identiques et indépendantes.
X compte le nombre de succès dans cette expérience.
Si on a réussi X fois dans les n tentatives, c'est que l'on a échoué $n - X = Y$ fois. Y compte le nombre d'échecs dans cette expérience et à ce titre, Y suit la loi binomiale de paramètres n et $1 - p$ *(représentant la probabilité d'échouer dans cette épreuve de Bernoulli)*
d'où $Y \hookrightarrow \mathscr{B}\big(n, 1 - p\big)$

Autre rédaction possible (nettement plus longue et technique)
On aurait pu ne pas reconnaître tout ça et procéder par calcul :
Puisque $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$, cela signifie que $\forall \omega \in \Omega$ *(c'est-à-dire pour tous les possibles)*

$$\begin{aligned}0 &\leq X(\omega) \leq n\\ -n &\leq -X(\omega) \leq 0\\ n - n &\leq n - X(\omega) \leq n - 0\\ 0 &\leq Y(\omega) \leq n\end{aligned}$$

d'où
$$Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$$

Donc $\forall k \in [\![0, n]\!]$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y = k) &= \mathrm{P}(n - X = k)\\ &= \mathrm{P}(-X = k - n)\\ &= \mathrm{P}(X = n - k)\\ &= \binom{n}{n-k} p^{n-k}(1-p)^{n-(n-k)} && \text{car } X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)\\ &= \binom{n}{k}\big(1 - (1-p)\big)^{n-k}(1-p)^k && \text{car } \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}\end{aligned}$$

On reconnaît là que $Y \hookrightarrow \mathscr{B}\big(n, 1 - p\big)$

Exercice 3

En interprétant comme succès "la pièce tombe sur pile" (dont la probabilité est égale à $\frac{1}{2}$), cette expérience correspond à une répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes et X désigne le rang du premier succès dans cette expérience. On peut donc conclure que X suit la loi géométrique $\mathscr{G}\left(\frac{1}{2}\right)$ $X \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\frac{1}{2}\right)$ et d'après le cours : $E(X) = 2$, $V(X) = 2$

Exercice 4

En interprétant comme succès "la personne est allergique au médicament" (dont la probabilité est égale à 10^{-3}), cette expérience correspond à une répétition de 1000 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes et X compte le nombre de succès dans cette expérience. On peut donc conclure que X suit la loi binomiale $\mathscr{B}\big(1000, 10^{-3}\big)$
$X \hookrightarrow \mathscr{B}(1000, 10^{-3})$ et d'après le cours : $E(X) = 1$, $V(X) = 0{,}999$

Exercice 5

Pour tout $i \in [\![1, 4]\!]$, on note U_i l'événement "on tire dans l'urne i". On note B l'événement "on tire une balle blanche".
D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\big(U_i\big)_{i \in [\![1,4]\!]}$, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B) &= \sum_{i=1}^{4} \mathrm{P}(U_i) P_{U_i}(B)\\ &= \tfrac{1}{4} \times \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} \times \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} \times \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} \times \tfrac{1}{5}\\ &= \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5}\right)\\ &= \tfrac{1}{4} \times \tfrac{30+20+15+12}{60} = \tfrac{77}{240}\end{aligned}$$

Exercices d'entrainement

Exercice 6

Une urne contient 5 boules blanches et 3 boules noires. L'expérience consiste à tirer successivement 3 boules, sans remise.

1. Notons A l'événement "tirer 3 boules blanches".

   Première rédaction possible : Grâce au dénombrement.

   Tirer successivement trois boules, sans remise et sans observer l'ordre d'apparition revient à tirer simultanément trois boules.

   - Il y a $\binom{8}{3}$ tirages équiprobables de 3 boules dans l'univers associé à cette expérience aléatoire.
   - Il y a $\binom{5}{3}$ tirages de 3 boules favorables à l'événement A

   La probabilité cherchée est donc :

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{3}} = \frac{\frac{5\times 4}{1\times 2}}{\frac{8\times 7\times \cancel{6}}{1\times\cancel{2\times 3}}} = \frac{10}{56} = \frac{5}{28}$$

   Deuxième rédaction possible : Par la formule des probabilités composées.

   En notant B_1 (resp. B_2, B_3) la probabilité de tirer une boule blanche au premier (resp. deuxième ou troisième tirage), on a

$$A = B_1 \cap B_2 \cap B_3$$

   d'après la formule des probabilités composées, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A) &= \mathrm{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3)\\ &= \mathrm{P}(B_1)\cdot \mathrm{P}_{B_1}(B_2)\cdot \mathrm{P}_{B_1\cap B_2}(B_3)\\ &= \frac{5}{8}\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{6} && (*)\\ &= \frac{5\times\cancel{2}\times\cancel{2\times 3}}{4\times\cancel{2}\times 7\times\cancel{6}} = \frac{5}{28}\end{aligned}$$

   $(*)$ à cette étape, chacun des tirage se réalise en situation d'équiprobabilité et il est facile de comptabiliser le nombre total de boules et le nombre de boules favorables (blanches) pour chacun des trois tirages

2. Notons C l'événement "une boule noire apparaisse pour la première fois au deuxième tirage".

$$C \text{ est réalisé} \quad \Leftrightarrow \quad \text{le premier tirage est blanc et le second est noir}$$

   Donc *(⚠, il peut tout se produire au troisième tirage, on ne le mentionne donc pas !)*

$$C = \left(B_1 \cap \overline{B_2}\right)$$

   D'après la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(C) &= \mathrm{P}\left(B_1\cap\overline{B_2}\right)\\ &= \frac{5}{8}\times\frac{3}{7}\\ &= \frac{15}{56}\end{aligned}$$

Exercice 7

$X(\Omega) = \{-2,-1,0,1,2\}$ donc $Y(\Omega) = \{0,1,4\}$

On détaille le calcul d'une case du tableau suivant : $(Y=4) = \left(X^2=4\right) = \left[(X=2)\cup(X=-2)\right]$ réunion formée d'événements incompatibles.

Donc : $\mathrm{P}(Y=4) = \mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=-2) = \frac{2}{5}+\frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

On procédant de même pour calculer $\mathrm{P}(X=1)$ et $\mathrm{P}(X=0)$ on obtient :

k	0	1	4
$\mathrm{P}(Y=k)$	1/10	3/10	3/5

Puis $E(Y) = \frac{27}{10}$, $E(Y^2) = \frac{99}{10}$, et par K-H : $V(Y) = \frac{261}{100}$ (pour le détail des calculs, reprendre la démarche de l'ex 11 du cours)

On procède de même pour la loi de Z et obtient : $Z(\Omega) = \{1, e, e^4\}$

x	1	e	e^4
$\mathrm{P}(Z=x)$	1/10	3/10	3/5

Exercice 8

1. On est dans la configuration où l'urne contient 2^n balles dont n balles blanches.
   Tirer une balle dans cette urne est une situation d'équiprobabilité.
   Donc $P_{(N=n)}(B) = \frac{n}{2^n}$

2. En appelant succès l'événement "tomber sur pile", de probabilité $\frac{1}{2}$, la première partie de l'expérience correspond à une répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre $\frac{1}{2}$. N compte le rang du premier succès dans cette expérience donc N suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.
Puisque $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\{(N = n)\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ constitue un système complet d'événements *(en effet, on peut obtenir tout de suite PILE ou on peut attendre un nombre arbitrairement grand de lancers pour obtenir PILE.)*
3. La formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{(N = n)\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ donne :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(B) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(N=n)\times \mathrm{P}_{(N=n)}(B) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \tfrac{n}{2^n} && \text{car } N \hookrightarrow \mathscr{G}(1/2) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{n}{4^n} \\
&= \tfrac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-1} \\
&= \tfrac{1}{4}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2} && \text{série géométrique dérivée première cv de raison } \frac{1}{4} \text{ avec } -1<\tfrac{1}{4}<1 \\
&= \tfrac{4}{9}
\end{aligned}$$

Exercice 9

1. a. *(phrase de rédaction habituelle (cf plus haut))* $X \hookrightarrow \mathscr{B}(8, 1/4)$
   b. d'après le cours $E(X) = 2$ et $V(X) = \frac{3}{2}$
2. a. Puisqu'il n'y a au total que 2 clients mécontents parmi les 8, en contactant 4 clients, on ne peut tomber que sur 2 clients mécontent, un client mécontent, ou personne de mécontent donc $M(\Omega) = [\![0, 2]\!]$
   On explicite le calcul correspondant à une case et on laisse les autres calcul au lecteur en guise d'entraînement :
   Considérons l'événement $(M = 1)$.
   Il y a $\binom{8}{4} = \frac{\cancel{8}\times7\times6\times5}{1\times\cancel{2}\times3\times\cancel{4}} = 70$ possibilités différentes **équiprobables** pour choisir 4 personnes parmi 8 personnes.
   Parmi ces quadruplets de personnes, on cherche ceux qui satisfont à l'événement $(M = 1)$: si on veut exactement 1 personne mécontente, cela veut dire qu'on doit encore en choisir 3 de contentes pour compléter l'échantillon.
   Et il y a $\binom{1}{2} = 2$ manières de choisir la personne mécontente, et $\binom{6}{3} = \frac{\cancel{6}\times5\times4}{\cancel{1\times2\times3}} = 20$ de choisir les triplets de gens contents (puisqu'il y a 2 mécontents dans les 8 personnes, il y en a 6 de contentes).
   Au total, en combinant toutes les possibilités de personnes mécontentes avec les triplets de personnes contentes, on a $2\times20 = 40$ quadruplets de personnes favorables à l'événement $(M = 1)$. d'où $\mathrm{P}(M = 1) = \frac{40}{70} = \frac{4}{7}$

k	0	1	2
$\mathrm{P}(M=k)$	3/14	4/7	3/14

   b. Les calculs habituels (laissés au lecteur) donnent : $E(M) = 1$ et $V(M) = \frac{3}{7}$

Exercice 10

- Pour $n = 1$, l'événement C_1 : obtenir un 6 pour la première fois au premier tirage et n'avoir eu que des pairs est réalisé si et seulement si on a obtenu 6 dès le premier lancer, ce qui correspond à l'événement B_1. Donc $C_1 = B_1$
- $\forall n \geq 2$, C_n est réalisé si et seulement si on a obtenu 2 ou 4 aux $n-1$ premiers lancers et que l'on a obtenu 6 au lancer n°n. Donc

  $$C_n = A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap B_n$$

  De plus, par équiprobabilité des faces obtenues lors d'un lancer de dé, , $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{P}(A_k) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et $\mathrm{P}(B_k) = \frac{1}{6}$

  $$\begin{aligned}
  \mathrm{P}(C_n) &= \mathrm{P}\big(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap B_n\big) \\
  &= \mathrm{P}\big(A_1\big)\ldots\ldots\ldots\mathrm{P}\big(A_{n-1}\big)\mathrm{P}\big(B_n\big) && \text{par indépendance des lancers} \\
  &= \left(\tfrac{1}{3}\right)^{n-1}\tfrac{1}{6}
  \end{aligned}$$

- la relation obtenue pour $n = 1$ est encore valable pour la formule trouvée pour $n \geq 2$ puisque l'on trouve dans les deux cas une probabilité d'$\frac{1}{6}$.

La question posée dans l'énoncé revient à calculer $\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n\right)$. Puisque le 6 ne peut pas apparaître à deux lancers différents d'après les conditions données par l'exercice, les C_n sont incompatibles et :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(C_n) \\
&= \tfrac{1}{6}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\tfrac{1}{3}\right)^{n-1} \\
&\underset{k=n-1}{=} \tfrac{1}{6}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\tfrac{1}{3}\right)^{k} \\
&= \tfrac{1}{6}\tfrac{1}{1-\frac{1}{3}} && \text{série géométrique cv car de raison } \tfrac{1}{3} \text{ avec } -1<\tfrac{1}{3}<1 \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Donc la probabilité de n'obtenir que des nombres pairs jusqu'à l'obtention du premier 6 est égale à $\frac{1}{4}$

Exercice 11

1. Pour la rédaction précise, s'inspirer de l'exo méthode 1.2 du chapitre 16 du cours de M. Brossard. $a=2$
2. Sans même faire de grands calculs, $\mathrm{P}(X=1)=\frac{2}{3}$ donc on se doute bien que la probabilité que X prenne des valeurs impaire est supérieure à celle que X prenne des valeurs paires.
3. • X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $2k3^{-k}$ est absolument convergente.
   Or $$2k3^{-k}=2k\left(\tfrac{1}{3}\right)^k=\tfrac{2}{3}\times k\left(\tfrac{1}{3}\right)^{k-1}$$
   Donc, à un facteur multiplicatif près, on reconnaît une série géométrique dérivée d'ordre 1 de raison $\frac{1}{3}$ avec $-1<\frac{1}{3}<1$ donc la série converge et donc converge absolument (série à termes positifs). Donc X admet une espérance et :

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(X) &= \sum_{k=1}^{+\infty} 2k3^{-k} \\
&= \tfrac{2}{3}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\tfrac{1}{3}\right)^{k-1} \\
&= \frac{2}{3}\times\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} \\
&= \frac{2}{3}\times\frac{9}{4}=\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

   • X admet un moment d'ordre deux si et seulement si la série de terme général $2k^2 3^{-k}$ est convergente.
   Or $$2k^2 3^{-k}=2k^2\left(\tfrac{1}{3}\right)^k=2k(k-1)\left(\tfrac{1}{3}\right)^k+2k\left(\tfrac{1}{3}\right)^k=\tfrac{2}{3^2}\times k(k-1)\left(\tfrac{1}{3}\right)^{k-2}+\tfrac{2}{3}\times k\left(\tfrac{1}{3}\right)^k$$
   On reconnaît une combinaison linéaire de séries géométriques dérivée d'ordre 2 et 1 de raison $\frac{1}{3}$ avec $-1<\frac{1}{3}<1$ donc la série converge. Donc X admet une moment d'ordre 2 et :

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left(X^2\right) &= \sum_{k=1}^{+\infty} 2k^2 3^{-k} \\
&= \tfrac{2}{3^2}\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)\left(\tfrac{1}{3}\right)^{k-2}+\tfrac{2}{3}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\tfrac{1}{3}\right)^{k-1} \\
&= \tfrac{2}{3^2}\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\left(\tfrac{1}{3}\right)^{k-2}+\tfrac{2}{3}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\tfrac{1}{3}\right)^{k-1} \\
&= \frac{2}{3^2}\times\frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3}+\frac{3}{2} \\
&= \frac{2}{3^2}\times\frac{2\times 3^3}{2^3}+\frac{3}{2} \\
&= \frac{3}{2}+\frac{3}{2}=3
\end{aligned}$$

   • X admet donc une variance et d'après la formule de Keonig-Huygens, $V(X)=\mathsf{E}\left(X^2\right)-\left(E(X)\right)^2=3-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{12-9}{4}=\frac{3}{4}$

4. On a

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(Y) &= \mathsf{E}\big(X(X-1)\big)\\
&= \mathsf{E}\big(X^2 - X\big)\\
&= \mathsf{E}\big(X^2\big) - \mathsf{E}(X) && \text{par linéarité de l'espérance}\\
&= 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

(Rq : il n'aurait pas été impossible ici d'utiliser le thm de transfert mais cela aurait été maladroit vu nos connaissances issues de la question précédente)

Exercice 12

On utilise le théorème du transfert, on calcule la somme de la formule sous réserve de convergence absolue, on arrange un peut le calcul, on reconnait la formule pour $x = 1-p$, on justifie qu'on a le droit de l'appliquer parce que $1-p$ est bien dans $]-1,1[$, donc la série converge, et même converge absolument puisqu'elle est à termes positifs, puis on trouve au final $E\left(\frac{1}{X}\right) = -\frac{p\ln p}{1-p}$

Exercice 13

Pour chaque variable aléatoire X suivante, donner $X(\Omega)$. Si elle est discrète finie, donner la loi de X sous forme de tableau. Calculer l'espérance et la variance (sauf pour X_2) de chacune de ces variables.

1. *(donner la rédact-type correspondant à la situation)* $X \hookrightarrow \mathscr{B}(4, 1/2)$ donc $E(X) = 2$ et $V(X) = 1$
2. Résultats bruts : $X_2(\Omega) = [\![1,6]\!]$ et

k	1	2	3	4	5	6
$\mathrm{P}(X_2 = k)$	11/36	9/36	7/36	5/36	3/36	1/36

et $E(X_2) = \frac{91}{36}$

3. Résultats bruts : $X_3(\Omega) = [\![1,5]\!]$ et

k	1	2	3	4	5
$\mathrm{P}(X_3 = k)$	1/3	4/15	1/5	2/15	1/15

et $E(X_3) = \frac{12}{5}$ et $V(X_3) = \frac{14}{9}$

4. Résultats bruts : $X_4(\Omega) = \{0,1,2,4,8,16\}$

k	0	1	2	4	8	16
$\mathrm{P}(X_4 = k)$	65/81	1/81	4/81	6/81	4/81	1/81

$E(X_4) = 1$ et $V(X_4) = \frac{544}{81}$

Exercice 14

Résultats bruts : **1.** un seul record $\frac{1}{n}$ **2.** n records $\frac{1}{n!}$ **3.** deux records $\frac{n-1}{n}$

Exercice 15 (d'après Ecricome 2005, ex3 partie II)

Notons P_i l'événement : "obtenir pile au i-ème lancer" et F_i l'événement : "obtenir face au i-ème lancer."

1. • $a_1 = \mathrm{P}(P_1 \cap P_2) = \mathrm{P}(P_1)\mathrm{P}(P_2) = p^2$ (car les lancers sont indépendants)
   • $a_2 = \mathrm{P}(F_1 \cap P_2 \cap P_3) = \mathrm{P}(F_1)\mathrm{P}(P_2)\mathrm{P}(P_3) = qp^2$
   • $a_3 = \mathrm{P}((F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4)) = q^2p^2 + qp^3 = qp^2(q+p) = qp^2$ (car les événements sont incompatibles, puis indépendants)
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   D'après l'énoncé, $a_{n+2} = \mathrm{P}((P_1 \cap F_2 \cap A_n) \cup (F_1 \cap A_{n+1})) = pqa_n + qa_{n+1}$,
   on a donc bien $a_{n+2} - qa_{n+1} - pqa_n = 0$.
3.
```
import numpy as np
n = int(input("Entrer la valeur de n :"))
p = int(input("Entrer la valeur de p :"))
a = 0
b = np.sqrt(p)
for k in range(2,n+1):
    c = (1-p)*b + p*(1-p)*b
    a = b
    b = c
print(a)
```

Exercice 16

A rendre en DM facultatif par exemple